

Das Matrix-Galerkin-Verfahren

Dissertation

zur Erlangung des
akademischen Grades

Dr. rer. nat.

vorgelegt von

DIRK BOYSEN

an der Technischen Fakultät
der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Kiel, 2015

Referent: Prof. Dr. Steffen Börm

Korreferent: Prof. Dr. Dr. h.c. Wolfgang Hackbusch

Korreferent: Prof. Dr. Lars Grasedyck

Datum der mündlichen Prüfung: 19.08.2015

Zum Druck genehmigt: 19.08.2015

Zusammenfassung

Matrixgleichungen treten in diversen Anwendungsgebieten numerischer Mathematik auf. Da die Lösungen solcher Gleichungen i.A. vollbesetzt sind, besitzen selbst Lösungsverfahren optimaler Komplexität einen Aufwand von mindestens n^2 Operationen, wobei n hier die zugrundeliegende Dimension beschreibt.

Häufig bilden Matrixgleichungen das diskrete Gegenstück eines zu lösenden, kontinuierlichen Problems, wie z.B. bei der Betrachtung bestimmter partieller Differentialgleichungen und deren Diskretisierung mit Tensor-Basisfunktionen. In diesen Fällen kann der Diskretisierungsfehler generell nur durch eine Erhöhung der Dimension n verringert werden. Aufgrund des mindestens quadratischen Aufwands direkter Lösungsverfahren sind diese nicht mehr praktikabel in hohen Dimensionen.

Motiviert durch die vorherigen Betrachtungen wurde eine Vielzahl von Verfahren entwickelt, um Lösungen von Matrixgleichungen mit einem geringeren Rechenaufwand zu approximieren. Zu dieser Kategorie gehören auch \mathcal{H} - und \mathcal{H}^2 -Matrix-Techniken, welche einen Rechenaufwand in $\mathcal{O}(k^a n \log^b(n))$ aufweisen. Hierbei beschreiben $a, b \geq 0$ kleine Konstanten und k einen Parameter, der die Genauigkeit steuert.

In der vorliegenden Arbeit wird ein neuartiger, auf \mathcal{H}^2 -Matrizen basierender Ansatz zur Approximation von Lösungen linearer Matrixgleichungen vorgestellt. Der Grundgedanke ist hierbei, die zu behandelnde Matrixgleichung in eine Variationsformulierung zu überführen, um so zu einer Galerkin-Formulierung zu gelangen. Der Teilraum aller \mathcal{H}^2 -Matrizen dient hierbei als Ansatzraum. Diese Vorgehensweise beruht auf einem der Grundgedanken der Finite-Elemente-Theorie, wodurch sich die dort gängige Lösungstheorie — Lemma von Lax-Milgram und Céa's Lemma — anwenden lässt, um so die Existenz sowie Stabilität einer eindeutigen Lösung zu zeigen.

Eine nähere Untersuchung der Galerkin-Formulierung führt auf ein matrixwertiges Gleichungssystem, bei dem die Unbekannten durch Matrizen mit k^2 Einträgen gegeben sind ($k \ll n$). Die zu berechnende \mathcal{H}^2 -Matrix-Approximation ergibt sich dann über das Lösen dieses Systems, z.B. durch iterative Verfahren.

Aufgrund der speziellen hierarchischen Struktur von \mathcal{H}^2 -Matrizen ist die Formulierung effizienter Algorithmen von zentraler Bedeutung. Zu diesen Algorithmen zählen insbesondere das Aufstellen, das Assemblieren sowie das Lösen des hergeleiteten Gleichungssystems. Unter plausiblen Annahmen wird gezeigt, dass alle verwendeten Algorithmen einen für \mathcal{H}^2 -Matrizen typischen Aufwand in $\mathcal{O}(k^a n)$ aufweisen.

Im Anschluss an die konkrete Definition des Matrix-Galerkin-Verfahrens sowie die Analyse aller im Rahmen dieser Arbeit benötigten Algorithmen folgen numerische Beispiele, die das Verhalten des neuen Ansatzes illustrieren.

Abstract

Matrix equations arise in many applications of numerical mathematics. Since solutions of these equations are generally densely populated, even solution strategies with optimal complexity need at least n^2 operations, with n being the underlying dimension.

Frequently, matrix equations represent the discrete counterpart of some continuous problem, e.g., when derived from the discretization of certain partial differential equations with tensor basis functions. In these cases a reduction of the discretization error can only be achieved by increasing the dimension n . As a result of their at least quadratic complexity, direct solution methods are typically not feasible for large dimensions.

Based on the aforementioned observations, a wide range of solution strategies have been developed that only approximate the solution, but with lower computational effort. These strategies comprise both \mathcal{H} - and \mathcal{H}^2 -matrix techniques that exhibit a complexity in $\mathcal{O}(k^a n \log^b(n))$ with small constants $a, b \geq 0$ and k being a parameter controlling the accuracy.

This thesis presents a novel approach for approximating solutions of linear matrix equations by using \mathcal{H}^2 -matrices. The basic idea is to translate the underlying matrix equation into a variational formulation in order to apply a Galerkin method. To this end the subspace of \mathcal{H}^2 -matrices is employed as trial space. This approach is based on the commonly used practice in the field of finite elements. Thus the same solution theory — namely the lemma of Lax-Milgram and Céa's lemma — is applicable, which allows to proof the existence and stability of a unique solution.

Further investigations show that the employed Galerkin method results in a linear system of matrix-valued equations, where the unknowns are matrices with k^2 entries ($k \ll n$). The desired \mathcal{H}^2 -matrix approximation is then obtained by solving this system, e.g., by using iterative methods.

Since \mathcal{H}^2 -matrices are given in a special hierarchical format, the design of efficient algorithms is a crucial point. These algorithms particularly include those for setting up, assembling, as well as solving the derived system of equations. Under plausible assumptions this thesis shows that all used algorithms exhibit a computational effort in $\mathcal{O}(k^a n)$, which is the typical complexity in the sense of \mathcal{H}^2 -matrices.

Subsequent to the definition of the new solution technique and the analysis of all required algorithms, numerical examples illustrate the behavior of this novel approach.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivierendes Beispiel	3
1.2	Struktur der vorliegenden Arbeit	8
2	Grundlagen	9
2.1	Matrizen, Vektoren und Konventionen	9
2.2	Matrixgleichungen	14
2.3	Variationsformulierungen	17
2.4	Bäume	19
3	Hierarchische Matrizen	31
3.1	Clusterbäume	31
3.2	Blockbäume	34
3.3	\mathcal{H}^2 -Matrizen	49
3.4	Schwachbesetztheit	53
3.4.1	Allgemeines Konzept	54
3.4.2	Spezielles Konzept	65
4	Matrix-Galerkin-Verfahren	71
4.1	Variationsformulierung	71
4.2	Besetztheitsmuster	82
4.2.1	Relationen	83
4.2.2	Relationsbäume	89
4.3	Matrix-Galerkin-Relationsbäume	97
4.3.1	Schwachbesetztheit	99
4.3.2	Aufstellen	106
4.3.3	Assemblieren	141
5	Lösungsstrategien	201
5.1	Operatordarstellung	202
5.2	Gauß-Seidel-Verfahren	207
5.3	pcg-Verfahren	214
5.4	Mehrgitterverfahren	218
5.4.1	Blockhierarchie	219
5.4.2	Mehrblockverfahren	221
5.4.3	Assemblieren	231

6	Numerische Beispiele	235
6.1	Geometrische Betrachtungen	237
6.2	Anwendungsbeispiele	241
6.2.1	Vorkonditionierer	242
6.2.2	Partielle Differentialgleichung	261
7	Zusammenfassung und Ausblick	283

Symbolverzeichnis

$\langle \cdot, \cdot \rangle_2, \ \cdot\ _2$	euklidisches Skalarprodukt und euklidische Norm, <i>S. 9</i>
$\langle \cdot, \cdot \rangle_F, \ \cdot\ _F$	Frobenius-Skalarprodukt und Frobenius-Norm, <i>S. 12</i>
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{F}}, \ \cdot\ _{\mathbb{F}}$	Kopplungsskalarprodukt und Kopplungsnorm, <i>S. 202</i>
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$	L^2 -Skalarprodukt, <i>S. 3</i>
$\boxplus, \boxdot, \boxminus$	Verknüpfungen im Kopplungsraum, <i>S. 202 und S. 203</i>
\sim	allgemeine Relation in einem Cluster- bzw. Blockbaum, <i>S. 84</i>
$\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \sim$	allgemeine Cluster- bzw. Blockrelation, <i>S. 84 bzw. S. 85</i>
$\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim^T, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \sim^T$	zu $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ bzw. $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \sim$ transponierte Relation, <i>S. 93 bzw. S. 94</i>
$\prec_A, \prec_{(A,B)}$	Matrix-Galerkin-Cluster- bzw. Blockrelation, <i>S. 84 bzw. S. 85</i>
$\prec_A^T, \prec_{(A,B)}^T$	zu \prec_A bzw. $\prec_{(A,B)}$ transponierte Matrix-Galerkin-Relation
$A_{p,q}$	Interaktionsmatrix in $\mathcal{T}_{\sim_A}^-$ bzw. $\mathcal{T}_{\tilde{p}, \tilde{q}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim}^-$, <i>S. 149 bzw. S. 151</i>
χ_t	Abschneidematrix bzgl. $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, <i>S. 49</i>
$C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$	$= \max_{t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}, s \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t)} \#L_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s))$, <i>S. 65</i>
$C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$	$= \max_{s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}}, t \in \text{col}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s)} \#L_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s))$, <i>S. 65</i>
$\text{col}(A, j)$	j -te Matrixspalte von $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, <i>S. 11</i>
$\text{col}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s)$	Blockspalte von $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$, <i>S. 46</i>
$\text{col}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s)$	$= \{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \mid (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \wedge \text{level}(t) = \text{level}(s)\}$, <i>S. 54</i>
$\text{col}^<(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s)$	$= \{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \mid (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \wedge \text{level}(t) < \text{level}(s)\}$, <i>S. 54</i>
$\text{col}^>(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s)$	$= \{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \mid (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \wedge \text{level}(t) > \text{level}(s)\}$, <i>S. 54</i>
$C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$	Wert, der die Schwachbesetztheit von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ beschreibt, <i>S. 47</i>
$C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}^=$	$= \max_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}, s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}} \{\# \text{row}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t), \# \text{col}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s)\}$, <i>S. 55</i>
$C_{U_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$	$= \max_{t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}, s \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t)} \#U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s))$, <i>S. 56</i>
$C_{U_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$	$= \max_{s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}}, t \in \text{col}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s)} \#U_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s))$, <i>S. 56</i>
$\text{depth}(\mathcal{T})$	Tiefe des Baums \mathcal{T} , <i>S. 28</i>
diam, dist	Durchmesser bzw. Abstand abgeschlossener Mengen, <i>S. 238</i>
e_i	i -ter Einheitsvektor im $\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$
$E_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}, E_t$	Transfermatrizen $(E_t)_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$, <i>S. 51</i>

Inhaltsverzeichnis

$\text{father}(v)$	Vater von $v \in \mathcal{T} \setminus \{\text{root}(\mathcal{T})\}$, <i>S. 21</i>
\mathcal{G}	Matrix-Galerkin-Operator, <i>S. 203</i>
$\mathcal{H}^2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}, W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}})$...	Menge aller \mathcal{H}^2 -Matrizen, <i>S. 52</i>
$\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$	endliche Indexmengen
$X \otimes Y$	Kronecker-Produkt von $(X, Y) \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}_1 \times \mathcal{J}_1} \times \mathbb{R}^{\mathcal{I}_2 \times \mathcal{J}_2}$, <i>S. 15</i>
$K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$	Rangverteilung $(K_t)_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$, <i>S. 50</i>
$L_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s))$	$= \max_{s^* \in U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s))} \text{level}(s^*) - \text{level}(t)$, <i>S. 65</i>
$L_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s))$	$= \max_{t^* \in U_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s))} \text{level}(t^*) - \text{level}(s)$, <i>S. 65</i>
$\text{level}(v)$	Level von $v \in \mathcal{T}$, <i>S. 28</i>
$\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$	Blätter von $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, <i>S. 31</i>
$\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$	Blätter von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ bzw. $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$, <i>S. 34 bzw. S. 44</i>
$\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+, \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^-$	zulässige und unzulässige Blätter von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, <i>S. 39</i>
\mathcal{L}_{\sim}	Menge aller Blätter von \mathcal{T}_{\sim} , <i>S. 90</i>
$\mathcal{M}, \mathcal{M}_b$	Raum aller \mathcal{H}^2 -Matrizen und lokaler Teilraum, <i>S. 75 und S. 78</i>
$\text{pred}(v)$	Vorfahren von $v \in \mathcal{T}$, <i>S. 24 und S. 26</i>
$\text{root}(\mathcal{T})$	Wurzel des Baums \mathcal{T} , <i>S. 20</i>
$\text{row}(A, i)$	i -te Matrixzeile von $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, <i>S. 11</i>
$\text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t)$	Blockzeile von $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, <i>S. 46</i>
$\text{row}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t)$	$= \{s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \mid (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \wedge \text{level}(s) = \text{level}(t)\}$, <i>S. 54</i>
$\text{row}^<(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t)$	$= \{s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \mid (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \wedge \text{level}(s) < \text{level}(t)\}$, <i>S. 54</i>
$\text{row}^>(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t)$	$= \{s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \mid (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \wedge \text{level}(s) > \text{level}(t)\}$, <i>S. 54</i>
$\text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t)$	unzulässige Blockzeile von $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, <i>S. 113</i>
$\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t)$	$= \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$, <i>S. 113</i>
S_b	Kopplungsmatrix, <i>S. 52</i>
$\sigma(A)$	Spektrum der Matrix $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$, <i>S. 10</i>
$\text{sons}(v)$	Söhne von $v \in \mathcal{T}$, <i>S. 20</i>
$\text{sons}^+(v)$	erweiterte Söhne von $v \in \mathcal{T}$, <i>S. 22</i>
$\text{sons}^*(v)$	Nachfahren von $v \in \mathcal{T}$, <i>S. 24 und S. 27</i>
$\text{sons}^-((t, s))$	unzulässige Söhne von $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, <i>S. 143</i>
$\text{sons}^*(p^*)$	Söhne von $p^* \in \mathcal{T}_{p,q}$, <i>S. 145</i>
$\text{sons}_{\mathcal{A}}((p^*, q))$	Söhne von $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\sim}$, <i>S. 146</i>
$\text{supp}(\varphi)$	Träger der Funktion $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, <i>S. 4</i>
\mathcal{T}	allgemeiner Baum, <i>S. 20</i>

$\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$	Clusterbaum für \mathcal{I} , <i>S.</i> 31
$\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$	Blockbaum für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$, <i>S.</i> 34
$\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$	zu $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ transponierter Blockbaum, <i>S.</i> 44
$\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^-$	Menge aller unzulässigen Blöcke von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, <i>S.</i> 91
\mathcal{T}_{\sim}	bzgl. \sim zulässiger Relationsbaum, <i>S.</i> 90
$\mathcal{T}_{\sim_A}, \mathcal{T}_{\sim_{(A,B)}}$	Matrix-Galerkin-Cluster bzw. -Blockrelationsbaum, <i>S.</i> 97
$\mathcal{T}_{(b',b),\sim}$	Auswertungsbaum für $(b',b) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ bzgl. \sim , <i>S.</i> 118
$\bar{\mathcal{T}}_p$	konstanter Clusterbaum für $p \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, <i>S.</i> 118
$\mathcal{T}_{p,q}$	Abschnittsbaum bzgl. $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, <i>S.</i> 145
$\mathcal{T}_{((p,q),b)}$	Tripelbaum für $((p,q),b)$ mit $(p,q,b) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, <i>S.</i> 118
$\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\sim}$	Assemblierungsbaum für $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\sim$, <i>S.</i> 145
$U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s))$	$= \{s^* \in \text{sons}^*(s) \mid (t, s^*) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}\}$, <i>S.</i> 56
$U_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s))$	$= \{t^* \in \text{sons}^*(t) \mid (t^*, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}\}$, <i>S.</i> 56
\hat{v}	Beschriftung von $v \in \mathcal{T}$, <i>S.</i> 30
\mathcal{V}	Kopplungsraum, <i>S.</i> 202
$\text{vec}(X)$	Vektorabbildung von $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, <i>S.</i> 15
$(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$	geschachtelte Clusterbasis $(V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}, E_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}, K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}})$, <i>S.</i> 51
$(V, E)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$	geschachtelte Clusterbasis $(V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}, E_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}})$, <i>S.</i> 51
$V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}, V_t$	Clusterbasismatrizen $(V_t)_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$, <i>S.</i> 50

1 Einleitung

Matrixgleichungen entstehen in vielen Anwendungsgebieten numerischer Mathematik. So führt z.B. unter bestimmten Voraussetzungen die Diskretisierung partieller Differentialgleichungen auf eine Gleichung der Form

$$AXM^* + MXA^* = C, \quad (1.1)$$

mit $A, M, C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und gesuchter Lösung $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$, wobei \mathcal{I} hier eine geeignete endliche Indexmenge beschreibt — vgl. Abschnitt 1.1 für eine detailliertere Herleitung von (1.1). Diese Gleichung ist eine allgemeinere Form der *Lyapunov-Gleichung*

$$AX + XA^* = C, \quad (1.2)$$

welche unter anderem in dem Bereich der Kontrolltheorie Anwendung findet [23, 18].

Ein klassischer Algorithmus zum Auflösen von (1.2) — also zur Berechnung von X — ist z.B. durch den *Bartels-Stewart-Algorithmus* aus [2] gegeben. Dieser Algorithmus ist dort allgemein für eine *Sylvester-Gleichung* der Form

$$AX + XB = C \quad (1.3)$$

formuliert und benötigt $\mathcal{O}(n^3)$ Operationen, mit $n := \#\mathcal{I}$. Dieses asymptotisch kubische Verhalten des Aufwands macht den Bartels-Stewart-Algorithmus unattraktiv für die Anwendung in großen Dimensionen — also für große Werte von n .

Dadurch, dass die n^2 Einträge der Lösung $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ die Unbekannten aller oben angegebenen Gleichungen darstellen, erfordert allein das Setzen dieser Werte einen Aufwand von n^2 Operationen. Ohne zusätzliche Annahmen an die Struktur von X , würde ein Lösungsverfahren *optimaler Komplexität* damit auch mindestens n^2 Operationen benötigen (vgl. [35, Kapitel 14]). In großen Dimensionen wäre selbst so ein Verfahren nicht praktikabel.

Eine effizientere Berechnung der Lösung ist also nur dann möglich, wenn nicht alle Einträge von X betrachtet werden müssten. Diese Voraussetzung ist z.B. gegeben, wenn ein Großteil der Einträge bekannt — z.B. gleich null — ist oder sich alle Einträge aus einer signifikant kleineren Menge an Daten reproduzieren lassen. Der erste Fall würde gelten, falls X *schwachbesetzt* ist — nur $\mathcal{O}(n)$ Einträge sind von null verschieden — und der zweite Fall wäre z.B. gegeben, wenn X die Form

$$X = UV^* \quad (1.4)$$

mit $U, V \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \kappa}$ besitzt, wobei κ hier eine endliche Indexmenge beschreibt, für die $k := \#\kappa \ll \#\mathcal{I} = n$ gilt. Die Lösung besitzt im letztgenannten Fall eine *Niedrigrangdarstellung*, womit lediglich $2kn \ll n^2$ Einträge berechnet bzw. gespeichert werden müssten.

1 Einleitung

Da Lösungen von Matrixgleichungen i.A. weder schwachbesetzt sind, noch über eine Darstellung wie in (1.4) verfügen, liegt es nahe, diese Lösungen durch Matrizen $\tilde{X} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ mit einer der oben genannten Eigenschaften zu *approximieren*. Die Konstruktion einer schwachbesetzten Matrix \tilde{X} als approximative Lösung von $AX = I$ — mit der Identitätsmatrix $I \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ — wurde z.B. in [29] untersucht.

Weitere Approximationstechniken sind durch \mathcal{H} - und \mathcal{H}^2 -Matrizen gegeben. Hierbei ist die Grundidee, eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ nicht global, sondern nur lokal in bestimmten Teilblöcken $X|_{\hat{t} \times \hat{s}}$ mit $\hat{t} \times \hat{s} \subseteq \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ durch niedrigen Rang darzustellen [27, 34, 35, 6]. Für beide Techniken liegt der Aufwand für Speicher sowie diverse arithmetische Operationen typischerweise in $\mathcal{O}(k^a n \log^b(n))$, mit $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $k \in \mathbb{N}$. Der Wert k charakterisiert hier den *lokalen Rang* und dient als Parameter, um die Güte der Approximation zu steuern. Im Zusammenhang mit der Konstruktion eines *Vorkonditionierers* für *Finite-Elemente-Steifigkeitsmatrizen*, also der Berechnung einer approximativen Lösung von

$$AX = I, \tag{1.5}$$

wurde in [3, 5, 22] exponentielle Konvergenz in k nachgewiesen und die Anwendung von \mathcal{H} -Matrizen im Bezug auf Lösungen von Sylvester-Gleichungen der Form (1.3) wurde z.B. in [26, 28] untersucht.

Sowohl \mathcal{H} - als auch \mathcal{H}^2 -Matrix-Techniken finden unter anderem Anwendung in der effizienten Darstellung nicht-lokaler Operatoren, z.B. *Integraloperatoren* [8, 7]. Die einem Integraloperator zugrundeliegende *Kernfunktion* wird hierbei z.B. durch *Interpolationstechniken* oder *Taylorentwicklungen* lokal approximiert, um daraus Niedrigrangmatrizen zu konstruieren. Neben diesem Anwendungsgebiet existieren auf rein algebraischen Betrachtungen basierende Algorithmen, die es ermöglichen, Matrix-Arithmetik effizient durchzuführen. Hierzu zählen neben der Matrix-Multiplikation und Matrix-Addition auch die Inversion sowie *LR-Zerlegung* von \mathcal{H} - bzw. \mathcal{H}^2 -Matrizen. Insbesondere eignen sich diese Techniken somit, um z.B. eine Matrixgleichung der Form $AX = I$ mit einer vorgegebenen Genauigkeit approximativ zu lösen [6, 27, 4, 9].

In dieser Arbeit wird einen neuartiger, auf \mathcal{H}^2 -Matrizen basierender Ansatz präsentiert, mit dem Matrixgleichungen approximativ gelöst werden können. Wie oben erwähnt, wurde in [3, 5, 22] die Darstellung der Lösung von (1.5) im \mathcal{H} - und \mathcal{H}^2 -Format analysiert, wobei A dort einer Finite-Elemente-Steifigkeitsmatrix eines *elliptischen partiellen Differentialoperators* \mathfrak{L} entspricht. In [3, 5] wird hierzu die Darstellung von \mathfrak{L}^{-1} untersucht und gezeigt, dass sich dieser inverse Operator — bzw. dessen diskretes Gegenstück — lokal durch niedrigen Rang approximieren lässt. In [3] geschieht dies über die Integraloperatordarstellung von \mathfrak{L}^{-1} mit einer *Greenschen Funktionen* als Kernfunktion (vgl. auch [30]). Es werden dort Glattheitseigenschaften der Kernfunktion ausgenutzt, um diese lokal durch z.B. Polynome zu approximieren. Hieraus resultiert dann die gesuchte lokale Niedrigrangdarstellung.

Motiviert durch diese Betrachtungen des inversen Operators wird in der vorliegenden Arbeit von der rein algebraischen Konstruktion von Algorithmen abgewichen, um so evtl. bekannte Eigenschaften der Lösung — z.B. Glattheit in bestimmten Teilgebieten — vorher in die Berechnung einfließen zu lassen.

Bevor eine Übersicht über die Struktur der vorliegenden Arbeit gegeben wird, dient der folgende Abschnitt dazu, exemplarisch zwei Matrixgleichungen herzuleiten. Für weitere Beispiele und einen Überblick diverser direkter sowie approximativer Lösungsverfahren sei auf [47] und die dort angegebenen Referenzen verwiesen.

1.1 Motivierendes Beispiel

Wir betrachten für $D \in \mathbb{N}$ ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^D$ (vgl. [20, Definition 2.36]) und einen linearen Differentialoperator der Form

$$\mathfrak{L} := - \sum_{i,j=1}^D \frac{\partial}{\partial x_i} \left(c_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad (1.6)$$

wobei $C : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{D \times D}$ mit

$$C(x) = (c_{ij}(x))_{i,j=1}^D \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

eine Koeffizientenmatrix definiere. Für ein Element $u \in H_0^1(\Omega)$ des *Sobolev-Raums* $V := H_0^1(\Omega)$ — für eine Definition dieses Raums siehe z.B. [44, Abschnitt 2.3] — lässt sich $\mathfrak{L}u \in H^{-1}(\Omega)$ als ein Element des *Dualraums* $V' := H^{-1}(\Omega)$ auffassen, es gilt also

$$\mathfrak{L} : V \rightarrow V'.$$

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels ist für eine gegebene rechte Seite $f \in V'$ eine Lösung $u \in V$ der *Operatorgleichung*

$$\mathfrak{L}u = f \quad (1.7)$$

gesucht. Die im Folgenden dargestellte Technik zum Lösen von (1.7) wird vor allem in der Theorie der *finiten Elemente* verwendet (vgl. z.B. [15]). Wir überführen (1.7) in eine *kontinuierliche Variationsformulierung* — siehe z.B. [48, Kapitel 3], [15, Kapitel II §2] oder Abschnitt 2.3 der vorliegenden Arbeit — der Form

$$a(u, v) := \langle \mathfrak{L}u, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V \quad (1.8)$$

zur Bestimmung einer Lösung $u \in V$. Es bezeichne hier $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die duale Paarung. Mit dem *Lebesgue-Raum* $L^2(\Omega)$ der *quadratintegrablen Funktionen* — für eine allgemeine Definition siehe z.B. [20, Abschnitt 4.2] — gilt $H_0^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$. Setzen wir $f \in L^2(\Omega)$ voraus, dann lässt sich die duale Paarung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nach dem *Darstellungssatz von Riesz* [20, Satz 2.25] durch das über

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} u(x)v(x) \, dx \quad \text{für alle } u, v \in L^2(\Omega)$$

definierte *L^2 -Skalarprodukt* ersetzen. Für (1.8) folgt dann die Darstellung

$$a(u, v) = \langle \mathfrak{L}u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in V \quad (1.9)$$

1 Einleitung

zur Bestimmung einer Lösung $u \in V$.

Aufgrund der Linearität von \mathfrak{L} definiert $a(\cdot, \cdot)$ eine Bilinearform. Es lässt sich zeigen, dass die Problemstellungen (1.7) und (1.9) äquivalent sind und (1.9) unter geeigneten Voraussetzungen an die Koeffizientenmatrix C eindeutig lösbar ist — vgl. hierzu z.B. [32, Kapitel 7] und dort insbesondere Theorem 7.2.2 und Theorem 7.2.3. Zur Bestimmung einer solchen Lösung wählen wir einen endlich-dimensionalen Teilraum $V_h \subseteq V$ — *Ansatzraum* genannt — und ersetzen mit diesem V in (1.9). Es ergibt sich so die *Galerkin-Variationsformulierung*

$$a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v_h \in V_h \quad (1.10)$$

zur Bestimmung einer *Näherungslösung* $u_h \in V_h$ von $u \in V$ aus (1.9) — siehe z.B. [48, Abschnitt 8.1], [15, Kapitel II §4] oder Abschnitt 2.3 der vorliegenden Arbeit.

Ausgehend von der Galerkin-Variationsformulierung (1.10) werden nun zwei verschiedene Varianten zum Lösen dieser Problemstellung vorgestellt, bei denen jeweils die Betrachtung einer *Matrixgleichung* in den Fokus rückt.

Erste Variante

Für die *Diskretisierung* von (1.10) wählen wir eine Basis des dort verwendeten endlich-dimensionalen Teilraums. Sei hierzu \mathcal{I} eine geeignete endliche Indexmenge und es bezeichne $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Basis von V_h . Stellen wir die gesuchte Lösung

$$u_h = \sum_{j \in \mathcal{I}} u_{h,j} \varphi_j$$

als Linearkombination der Basiselemente dar und ersetzen die *Testfunktion* v_h in (1.10) durch φ_i mit $i \in \mathcal{I}$, dann ergibt sich unter Verwendung der Linearität von $a(\cdot, \cdot)$ die Gleichung

$$\sum_{j \in \mathcal{I}} u_j a(\varphi_j, \varphi_i) = \langle f, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Wir definieren $\bar{u}, \bar{f} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ sowie $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ durch

$$\bar{u}_j := u_{h,j}, \quad \bar{f}_i := \langle f, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{und} \quad a_{ij} := a(\varphi_j, \varphi_i)$$

für alle $i, j \in \mathcal{I}$, dann reduziert sich (1.10) auf die Bestimmung einer Lösung $\bar{u} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ des linearen Gleichungssystems

$$A\bar{u} = \bar{f}. \quad (1.11)$$

Betrachten wir für $k \in \mathcal{I}$ die *Träger* (vgl. z.B. [20, Definition 2.36])

$$\text{supp}(\mathfrak{L}\varphi_k) = \overline{\{x \in \Omega \mid \mathfrak{L}\varphi_k(x) \neq 0\}} \quad \text{und} \quad \text{supp}(\varphi_k) = \overline{\{x \in \Omega \mid \varphi_k(x) \neq 0\}},$$

dann gilt insbesondere $\varphi_k(x) = 0$ für alle $x \in \Omega \setminus \text{supp}(\varphi_k)$. Sei $x \in \Omega \setminus \text{supp}(\varphi_k)$, dann folgt

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(x) = 0 \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, D\}$$

da $\Omega \setminus \text{supp}(\varphi_k)$ offen ist und damit auch

$$\mathfrak{L}\varphi_k(x) = - \sum_{i,j=1}^D \frac{\partial}{\partial x_i} \left(c_{ij}(x) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(x) \right) = 0,$$

wobei wir \mathfrak{L} hier als Differentialoperator — im Sinne von (1.6) — und nicht als Abbildung von V nach V' betrachten. Es gilt also

$$\Omega \setminus \text{supp}(\varphi_k) \subseteq \Omega \setminus \text{supp}(\mathfrak{L}\varphi_k)$$

bzw.

$$\text{supp}(\mathfrak{L}\varphi_k) \subseteq \text{supp}(\varphi_k).$$

Da dies für alle $k \in \mathcal{I}$ gilt, folgt für alle $i, j \in \mathcal{I}$ mit $\text{supp}(\varphi_j) \cap \text{supp}(\varphi_i) = \emptyset$ auch $\text{supp}(\mathfrak{L}\varphi_j) \cap \text{supp}(\varphi_i) = \emptyset$ und damit

$$a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \langle \mathfrak{L}\varphi_j, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)} = 0,$$

womit nach Kontraposition

$$a_{ij} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{supp}(\varphi_j) \cap \text{supp}(\varphi_i) \neq \emptyset$$

folgt. Der nichtleere Schnitt von Trägern zweier Basisfunktionen φ_j und φ_i ist somit ein notwendiges Kriterium für einen Nicht-Null-Eintrag $a_{ij} \neq 0$. Aus diesem Grund werden die Basisfunktionen generell so konstruiert, dass diese nur über lokale Träger verfügen. Es resultiert dann eine *schwachbesetzte* Matrix, womit sich zum Lösen von (1.11) unter anderem eine Reihe von Iterationsverfahren eignen, wie sie z.B. in [33] sowohl definiert als auch analysiert werden.

Ist (1.10) für alle rechte Seiten eindeutig lösbar, so ist A invertierbar. Bezeichnen wir mit $I \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ die Identitätsmatrix, dann ist A^{-1} die eindeutige Lösung der Matrixgleichung

$$AX = I, \tag{1.12}$$

wobei $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ die gesuchte Lösung bezeichne. Es gilt

$$\bar{u} = A^{-1}A\bar{u} = A^{-1}\bar{f},$$

womit sich die Lösung \bar{u} von (1.11) über die Lösung A^{-1} von (1.12) berechnen lässt.

Da A^{-1} in einer Vielzahl von Anwendungen allerdings vollbesetzt ist, würde sich allein der Aufwand des Setzens aller Einträge von A^{-1} bzw. der benötigte Speicherbedarf dieser Matrix proportional zu $(\#\mathcal{I})^2$ verhalten. Aus diesem Grund sind wir lediglich an einer Approximation $\tilde{X} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ der Lösung $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ von (1.12) interessiert. Diese ließe sich dann für das *Vorkonditionieren* diverser Iterationsverfahren verwenden, um so eine Lösung von (1.11) mit „vertretbarem Aufwand“ berechnen zu können (siehe z.B. [33, Abschnitt 8.3]).

Zweite Variante

Die Herleitung dieser Variante orientiert sich an [36, Chapter 16]. Für die zugrundeliegende Dimension D gelte $D = 2d$ mit $d \in \mathbb{N}$ — also $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{2d}$ — und es existiere $\omega \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $\Omega = \omega \times \omega$. Des Weiteren sei der Differentialoperator \mathfrak{L} aus (1.6) *separabel* (vgl. [36, Abschnitt 16.2.1]), es existieren also

$$\mathfrak{L}^{(1)} := - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(c_{ij}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}^{(2)} := - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(c_{ij}^{(2)} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

mit Koeffizientenmatrizen $C^{(1)} : \omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ sowie $C^{(2)} : \omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ so, dass

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^{(1)} \otimes id + id \otimes \mathfrak{L}^{(2)}$$

gilt. Hierbei bezeichne \otimes das *Tensor-Produkt* — für eine allgemeine Definition siehe z.B. [36, Chapter 3] — und id den Identitätsoperator auf einem geeigneten Raum V_ω mit $V = V_\omega \otimes V_\omega$, wobei $\mathfrak{L}^{(1)}$ sowie $\mathfrak{L}^{(2)}$ als d -dimensionale Differentialoperatoren auf V_ω aufzufassen sind. So eine Darstellung existiert z.B., wenn die Koeffizientenmatrix C aus (1.6) konstant ist und keine gemischten Ableitungsterme auftreten (vgl. [36, Abschnitt 1.2.4]).

Wir definieren die beiden Bilinearformen

$$a^{(1)}(u, v) := \langle (\mathfrak{L}^{(1)} \otimes id)u, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{und} \quad a^{(2)}(u, v) := \langle (id \otimes \mathfrak{L}^{(2)})u, v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

für alle $u, v \in V$, dann folgt für die Variationsformulierung (1.9) die Darstellung

$$a(u, v) = a^{(1)}(u, v) + a^{(2)}(u, v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad (1.13)$$

für alle $u, v \in V$.

Für den Ansatzraum V_h nehmen wir an, dass ein Raum $V_{h,\omega}$ so existiert, dass

$$V_h = V_{h,\omega} \otimes V_{h,\omega}$$

und für alle $u_{h,\omega}^{(1)} \otimes u_{h,\omega}^{(2)}, v_{h,\omega}^{(1)} \otimes v_{h,\omega}^{(2)} \in V_h$ die Gleichung

$$\langle u_{h,\omega}^{(1)} \otimes u_{h,\omega}^{(2)}, v_{h,\omega}^{(1)} \otimes v_{h,\omega}^{(2)} \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u_{h,\omega}^{(1)}, v_{h,\omega}^{(1)} \rangle_{L^2(\omega)} \langle u_{h,\omega}^{(2)}, v_{h,\omega}^{(2)} \rangle_{L^2(\omega)} \quad (1.14)$$

gilt. Diese Bedingung ist z.B. erfüllt, wenn $V_{h,\omega} \subseteq L^2(\omega)$ gilt. Gleichung (1.14) ergibt sich dann über den *Satz von Fubini* [38, Theorem 8.4].

Für $u_h = u_{h,\omega}^{(1)} \otimes u_{h,\omega}^{(2)}, v_h = v_{h,\omega}^{(1)} \otimes v_{h,\omega}^{(2)} \in V_h$ folgt dann

$$\begin{aligned} a^{(1)}(u_h, v_h) &= \langle (\mathfrak{L}^{(1)} \otimes id)(u_{h,\omega}^{(1)} \otimes u_{h,\omega}^{(2)}), v_{h,\omega}^{(1)} \otimes v_{h,\omega}^{(2)} \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle (\mathfrak{L}^{(1)} u_{h,\omega}^{(1)}) \otimes u_{h,\omega}^{(2)}, v_{h,\omega}^{(1)} \otimes v_{h,\omega}^{(2)} \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle \mathfrak{L}^{(1)} u_{h,\omega}^{(1)}, v_{h,\omega}^{(1)} \rangle_{L^2(\omega)} \langle u_{h,\omega}^{(2)}, v_{h,\omega}^{(2)} \rangle_{L^2(\omega)} \end{aligned}$$

und analog

$$a^{(2)}(u_h, v_h) = \langle u_{h,\omega}^{(1)}, v_{h,\omega}^{(1)} \rangle_{L^2(\omega)} \langle \mathfrak{L}^{(2)} u_{h,\omega}^{(2)}, v_{h,\omega}^{(2)} \rangle_{L^2(\omega)}.$$

Wir wählen nun eine Basis $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ von $V_{h,\omega}$, wobei \mathcal{I} hier wieder eine geeignete endliche Indexmenge sei. Eine Basis von V_h ist dann durch $(\varphi_i \otimes \varphi_j)_{i,j \in \mathcal{I}}$ gegeben (siehe z.B. [36, Lemma 3.11]).

Schreiben wir die zu berechnende Lösung

$$u_h = \sum_{(k,l) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}} u_{h,kl} (\varphi_k \otimes \varphi_l)$$

in Analogie zu der ersten Variante als Linearkombination der Basiselemente und ersetzen die Testfunktion v_h durch $\varphi_i \otimes \varphi_j$ mit $(i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) &= a^{(1)}(u_h, v_h) + a^{(2)}(u_h, v_h) \\ &= \sum_{(k,l) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}} u_{h,kl} a^{(1)}(\varphi_k \otimes \varphi_l, \varphi_i \otimes \varphi_j) + \sum_{(k,l) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}} u_{h,kl} a^{(2)}(\varphi_k \otimes \varphi_l, \varphi_i \otimes \varphi_j) \\ &= \sum_{(k,l) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}} u_{h,kl} \langle \mathfrak{L}^{(1)} \varphi_k, \varphi_i \rangle_{L^2(\omega)} \langle \varphi_l, \varphi_j \rangle_{L^2(\omega)} \\ &\quad + \sum_{(k,l) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}} u_{h,kl} \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle_{L^2(\omega)} \langle \mathfrak{L}^{(2)} \varphi_l, \varphi_j \rangle_{L^2(\omega)}. \end{aligned}$$

Wir definieren die Matrizen $U, M \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ durch

$$u_{kl} := u_{h,kl} \quad \text{und} \quad m_{ij} := \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle_{L^2(\omega)}$$

für alle $(k, l), (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ sowie die Matrizen $A^{(1)}, A^{(2)} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ durch

$$a_{ik}^{(1)} := \langle \mathfrak{L}^{(1)} \varphi_k, \varphi_i \rangle_{L^2(\omega)} \quad \text{und} \quad a_{jl}^{(2)} := \langle \mathfrak{L}^{(2)} \varphi_l, \varphi_j \rangle_{L^2(\omega)}$$

für alle $(i, k), (j, l) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$, dann gilt

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) &= \sum_{(k,l) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}} u_{kl} a_{ik}^{(1)} m_{jl} + \sum_{(k,l) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}} u_{kl} m_{ik} a_{jl}^{(2)} \\ &= \sum_{(k,l) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}} a_{ik}^{(1)} u_{kl} m_{lj}^* + \sum_{(k,l) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}} m_{ik} u_{kl} (a_{jl}^{(2)})_{lj}^* \\ &= \left(A^{(1)} U M^* \right)_{ij} + \left(M U (A^{(2)})^* \right)_{ij}. \end{aligned}$$

Definieren wir zusätzlich die Matrix $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ über

$$b_{ij} := \langle f, \varphi_i \otimes \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)}$$

für alle $(i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ und fassen alle so entstandenen Gleichungen — also für alle $(i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ — zusammen, dann ist das Lösen von (1.10) äquivalent zur Berechnung einer Lösung $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ der Matrixgleichung

$$A^{(1)} X M^* + M X (A^{(2)})^* = B. \tag{1.15}$$

1 Einleitung

Auch hier stellt sich die Frage, ob es ausreicht, die Gleichung (1.15) nur approximativ zu lösen, ohne dabei Genauigkeit im Sinne eines geeigneten Kriteriums zu verlieren. Da durch die Ersetzung von V durch V_h bereits ein *Diskretisierungsfehler* entsteht, bietet es sich an, (1.15) nur bis zu einer von diesem Diskretisierungsfehler abhängigen Genauigkeit zu berechnen, ohne hierbei essentielle Informationen der diskreten Lösung einzubüßen.

1.2 Struktur der vorliegenden Arbeit

Nach der Einführung der für diese Arbeit grundlegenden Begriffe, Konzepte und Aussagen in Kapitel 2 sowie der Betrachtung von \mathcal{H}^2 -Matrizen in Kapitel 3, wird das Matrix-Galerkin-Verfahren in Kapitel 4 eingeführt und analysiert. Im Fokus steht hierbei die Behandlung einer linearen Matrixgleichung

$$AXB^* = C \tag{1.16}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$, $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$, $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und gesuchter Lösung $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ für zwei endliche Indexmengen \mathcal{I} und \mathcal{J} . An geeigneter Stelle erfolgt eine Erweiterung der Betrachtungen auf allgemeine lineare Matrixgleichungen der Form

$$\sum_{i=1}^N A_i X B_i^* = C \tag{1.17}$$

mit $N \in \mathbb{N}$ sowie $A_i \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B_i \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ (vgl. z.B. [12]).

In Abschnitt 4.1 wird gezeigt, dass die Berechnung einer approximativen Lösung von (1.16) bzw. (1.17) mit dem Matrix-Galerkin-Verfahren auf das Lösen eines matrixwertigen Gleichungssystems führt. Der Fokus für die verbleibenden Abschnitte des Kapitels 4 liegt dann auf der Konstruktion effizienter Algorithmen zur numerischen Behandlung dieses resultierenden Gleichungssystems. Effizient bedeutet hier, dass alle Algorithmen einen für \mathcal{H}^2 -Matrizen typischen asymptotisch linearen Aufwand — asymptotisch linear in der Anzahl der zugrundeliegenden Freiheitsgrade $\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$ — aufweisen. Von besonderer Bedeutung ist dort der Abschnitt 4.2, in dem Strukturen eingeführt werden, die das Fundament der Analyse des Matrix-Galerkin-Verfahrens in Abschnitt 4.3 bereitstellen.

Dem Kapitel 5 über mögliche Lösungsstrategien für das in Kapitel 4 hergeleitete Gleichungssystem folgen numerische Ergebnisse in Kapitel 6. Dort wird das Verhalten des Matrix-Galerkin-Verfahrens anhand der in Abschnitt 1.1 hergeleiteten Matrixgleichungen illustriert. Die komplette Implementierung wurde hierbei auf Basis der durch die Programmbibliothek *H2Lib* [19] zur Verfügung gestellten Routinen sowie Datenstrukturen realisiert und ist in der Sprache *C* geschrieben.

Abschließend folgt in Kapitel 7 eine kurze Zusammenfassung dieser Arbeit und ein Blick auf mögliche Erweiterungen sowie auf potentiell noch zu behandelnde Problem- und Fragestellungen.

2 Grundlagen

Dieses Kapitel widmet sich der Einführung einiger grundlegenden Konzepte in der für die vorliegende Arbeit benötigten Form. Zu diesen Konzepten gehören neben konkreten Definitionen und Aussagen auch Konventionen im Bezug auf einige verwendete Begriffe, wie z.B. den *Aufwand* eines Algorithmus. Da sich der überwiegende Teil dieser Arbeit mit Matrizen befasst, werden wir nachstehend auch einige Aussagen zusammentragen, wie wir sie im weiteren Verlauf benötigen.

2.1 Matrizen, Vektoren und Konventionen

Definition 2.1.1 (Euklidisches Skalarprodukt und euklidische Norm). *Sei \mathcal{I} eine endliche Indexmenge, dann bezeichnen wir die Abbildung*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_2 : \mathbb{R}^{\mathcal{I}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle_2 := \sum_{i \in \mathcal{I}} x_i y_i$$

als euklidisches Skalarprodukt und die Abbildung

$$\| \cdot \|_2 : \mathbb{R}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto \|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle_2}$$

als euklidische Norm.

Die ein Skalarprodukt definierenden Eigenschaften (siehe z.B. [20, Definition 2.20]) lassen sich für $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ direkt nachrechnen und [20, Lemma 2.22] stellt sicher, dass $\| \cdot \|_2$ in der Tat eine Norm darstellt.

Matrizen werden im Folgenden generell mit Großbuchstaben versehen und für deren *Einträge* die entsprechenden Kleinbuchstaben verwendet.

Bemerkung 2.1.2 (Matrixeinträge). *Seien \mathcal{I} und \mathcal{J} zwei endliche Indexmengen sowie $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ eine Matrix, dann bezeichnen wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit die Einträge von A mit*

$$(A)_{ij} \text{ oder } a_{ij} \quad \text{für alle } (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}.$$

Unter Zuhilfenahme dieser Konvention führen wir die *transponierte Matrix* ein und definieren anschließend die Begriffe *Eigenwert* und *Eigenvektor* sowie das *Spektrum* einer Matrix.

Definition 2.1.3 (Transponierte und symmetrische Matrix). *Seien \mathcal{I} und \mathcal{J} zwei endliche Indexmengen sowie $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Gilt für die Einträge einer Matrix $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{I}}$*

$$\tilde{a}_{ji} = a_{ij} \quad \text{für alle } (j, i) \in \mathcal{J} \times \mathcal{I},$$

2 Grundlagen

so nennen wir \tilde{A} die zu A transponierte Matrix und bezeichnen diese mit A^* sowie deren Einträge mit

$$(A^*)_{ji} \text{ oder } a_{ji}^* \quad \text{für alle } (j, i) \in \mathcal{J} \times \mathcal{I}.$$

Gilt $A = A^*$, dann nennen wir A symmetrisch.

Definition 2.1.4 (Eigenwert, Eigenvektor und Spektrum). Sei \mathcal{I} eine endliche Indexmenge sowie $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$. Existieren $\lambda \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}} \setminus \{0\}$ so, dass

$$Ax = \lambda x$$

gilt, nennen wir λ einen Eigenwert von A und x einen zu λ gehörenden Eigenvektor. Die Menge

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$$

aller Eigenwerte von A bezeichnen wir als das Spektrum von A .

Lemma 2.1.5 (Eigenwerte). Sei \mathcal{I} eine endliche Indexmenge und $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ eine symmetrische Matrix, dann gelten

(a) $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ und

(b) mit $\alpha := \min\{\lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ sowie $\beta := \max\{\lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ für alle $x \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ die Abschätzungen

$$\alpha \|x\|_2^2 \leq \langle Ax, x \rangle_2 \leq \beta \|x\|_2^2.$$

Beweis. (a) Siehe [41, Theorem 1.7].

(b) Für $x = 0$ gelten die Ungleichungen direkt und für $x \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}} \setminus \{0\}$ folgen nach [41, Theorem 1.9] für den *Rayleigh-Quotienten* die Abschätzungen

$$\alpha \leq \frac{\langle Ax, x \rangle_2}{\langle x, x \rangle_2} \leq \beta.$$

Durch Umstellen und die Definition der euklidischen Norm (vgl. Definition 2.1.1) ergibt sich die zu beweisende Aussage. \square

Eine spezielle Eigenschaft von Matrizen ist die *positive Definitheit*. Es lässt sich zeigen, dass das Spektrum von Matrizen, die dieser Bedingung genügen, immer reell und echt positiv sein muss.

Definition 2.1.6 (Positiv definit). Sei \mathcal{I} eine endliche Indexmenge und $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$. Wir nennen die Matrix A positiv definit, wenn diese symmetrisch ist und die Eigenschaft

$$\langle Ax, x \rangle_2 > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}} \setminus \{0\}$$

erfüllt.

2.1 Matrizen, Vektoren und Konventionen

Lemma 2.1.7 (Positiv definit). *Sei \mathcal{I} eine endliche Indexmenge und $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ eine symmetrische Matrix, dann ist A genau dann positiv definit, wenn $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ gilt.*

Beweis. Siehe [49, Theorem 2.3]. □

Von besonderem Interesse werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit *schwachbesetzte* Matrizen sein. Bevor wir diesen Begriff formal definieren können, führen wir Bezeichnungen für die einzelnen *Zeilen* sowie *Spalten* einer Matrix ein.

Definition 2.1.8 (Matrixzeile und -spalte). *Seien \mathcal{I} und \mathcal{J} zwei endliche Indexmengen sowie $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ eine Matrix, dann nennen wir für $i \in \mathcal{I}$ die Menge*

$$\text{row}(A, i) := \{j \in \mathcal{J} \mid a_{ij} \neq 0\}$$

i -te Matrixzeile — bzw. einfach i -te Zeile — von A sowie für $j \in \mathcal{J}$ die Menge

$$\text{col}(A, j) := \{i \in \mathcal{I} \mid a_{ij} \neq 0\}$$

j -te Matrixspalte — bzw. einfach j -te Spalte — von A .

Definition 2.1.9 (Schwachbesetzte Matrix). *Seien \mathcal{I} und \mathcal{J} zwei endliche Indexmengen sowie $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ eine Matrix. Existiert ein $C_{\text{sp},A} \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $i \in \mathcal{I}$ und alle $j \in \mathcal{J}$*

$$\#\text{row}(A, i) \leq C_{\text{sp},A} \quad \text{sowie} \quad \#\text{col}(A, j) \leq C_{\text{sp},A}$$

gilt, dann nennen wir die Matrix $C_{\text{sp},A}$ -schwachbesetzt. Verwenden wir diesen Begriff ohne $C_{\text{sp},A}$ einzuführen, so setzen wir implizit voraus, dass $C_{\text{sp},A} \in \mathbb{N}$ gilt. Lässt sich $C_{\text{sp},A}$ unabhängig von $\#\mathcal{I}$ sowie $\#\mathcal{J}$ beschränken, dann nennen wir diesen Wert auch Schwachbesetztheitskonstante von A .

Wie in Definition 2.1.9 zu erkennen, kommt dem Begriff *konstant* eine besondere Bedeutung zu. Insbesondere im Zusammenhang mit dem *Aufwand* von Algorithmen ist dieser Ausdruck von Interesse. Hierbei nehmen wir im Folgenden immer implizit an, dass eine Klasse von Problemstellungen zugrundeliegt und nennen einen Wert „konstant“, wenn dieser unabhängig von dem speziellen Problem der Klasse ist. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird diesen Problemklassen immer eine Familie von Indexmengen zugrundeliegen, womit konstante Werte insbesondere unabhängig von deren Mächtigkeiten sind. Genau in diesem Sinne ist die Bezeichnung „Schwachbesetztheitskonstante“ aus Definition 2.1.9 zu verstehen.

Bemerkung 2.1.10 (Aufwand). *Im Laufe der vorliegenden Arbeit werden Algorithmen hinsichtlich deren Aufwands untersucht. Das generelle Ziel bei der Gestaltung aller Algorithmen ist es, dass sich dieser Aufwand asymptotisch linear in $\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$ verhält. Dies bedeutet, dass für den Aufwand — im Folgenden mit Eff bezeichnet — $C_1, C_2 \in \mathbb{N}$ mit*

$$\text{Eff} \leq C_1 \#\mathcal{I} + C_2 \#\mathcal{J}$$

2 Grundlagen

existieren, wobei C_1 und C_2 unabhängig von $\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$ beschränkt — also konstant — sind. \mathcal{I} und \mathcal{J} sind hierbei immer in einem geeigneten Sinne zugrundeliegende Indexmengen.

Wir werden für den Aufwand eines Algorithmus i.A. die Anzahl der dort auftretenden arithmetischen Operationen ansehen, wobei sich diese nur aus Additionen und Multiplikationen zusammensetzen. Hierbei betrachten wir Subtraktionen als Additionen und Divisionen als Multiplikationen. Es werden allerdings auch Algorithmen auftreten, in denen keine solche Operationen anfallen. Diese hätten dann nach obiger Konvention keinen Aufwand. Aus diesem Grund wird an entsprechender Stelle angegeben, was dort als Aufwand anzusehen ist.

In einem Großteil dieser Fälle wird dieser Aufwand die Form einer Abfrage annehmen, ob sich ein Element in einer gegebenen Menge befindet oder nicht. Am Beispiel einer $C_{\text{sp},A}$ -schwachbesetzten Matrix $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit zwei endlichen Indexmengen \mathcal{I} und \mathcal{J} wäre für $(i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}$ in einem Algorithmus die Abfrage

$$\text{Gilt } j \in \text{row}(A, i)?$$

als Aufwand zu sehen. Mit $\#\text{row}(A, i) \leq C_{\text{sp},A}$ nehmen wir an, dass dieser — bei entsprechender Implementierung — durch $C_{\text{sp},A}$ beschränkt ist, da wir maximal jedes Element aus $\text{row}(A, i)$ einmal mit j vergleichen müssten.

Wir werden nun das *Frobenius-Skalarprodukt* und die *Frobenius-Norm* definieren. Ausgestattet mit diesem Skalarprodukt wird der lineare Raum aller Matrizen zu einem *Hilbertraum* — für die Definition eines Hilbertraums siehe z.B. [20, Definition 2.23]. Diese fundamentale Eigenschaft werden wir uns später bei der Herleitung des *Matrix-Galerkin-Ansatzes* zunutze machen.

Definition 2.1.11 (Frobenius-Skalarprodukt und -Norm). Seien \mathcal{I} und \mathcal{J} zwei endliche Indexmengen, dann nennen wir die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_F : \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (A, B) \mapsto \langle A, B \rangle_F := \sum_{(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}} a_{ij} b_{ij}$$

Frobenius-Skalarprodukt und die Abbildung

$$\| \cdot \|_F : \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad A \mapsto \|A\|_F := \sqrt{\langle A, A \rangle_F}$$

Frobenius-Norm.

Wie für das euklidische Skalarprodukt lassen sich die Skalarprodukteigenschaften direkt nachrechnen und durch die Definition über $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ stellt $\| \cdot \|_F$ eine Norm dar.

Korollar 2.1.12 (Frobenius-Skalarprodukt). Seien \mathcal{I} , \mathcal{J} und \mathcal{K} endliche Indexmengen, dann gilt für alle $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{K}}$, $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{K} \times \mathcal{J}}$ und $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$

$$\langle AB, C \rangle_F = \langle B, A^* C \rangle_F = \langle A, C B^* \rangle_F.$$

2.1 Matrizen, Vektoren und Konventionen

Beweis. Seien $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{K}}$, $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{K} \times \mathcal{J}}$ und $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \langle AB, C \rangle_F &= \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{j \in \mathcal{J}} (AB)_{ij} (C)_{ij} = \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{k \in \mathcal{K}} (A)_{ik} (B)_{kj} (C)_{ij} \\ &= \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{i \in \mathcal{I}} (B)_{kj} (A^*)_{ki} (C)_{ij} = \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{J}} (B)_{kj} (A^* C)_{kj} = \langle B, A^* C \rangle_F \end{aligned}$$

und analog

$$\langle AB, C \rangle_F = \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{j \in \mathcal{J}} (A)_{ik} (C)_{ij} (B^*)_{jk} = \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{k \in \mathcal{K}} (A)_{ik} (CB^*)_{ik} = \langle A, CB^* \rangle_F.$$

□

Lemma 2.1.13 (Hilbertraum). *Seien \mathcal{I} und \mathcal{J} zwei endliche Indexmengen, dann ist der lineare Raum $(\mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$ ein Hilbertraum.*

Beweis. Definieren wir für alle $(k, l) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}$ die Matrizen $E_{kl} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ durch

$$(E_{kl})_{ij} := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } (k, l) = (i, j), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $(i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}$, dann lässt sich direkt nachrechnen, dass $\{E_{kl} \mid (k, l) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ist und $\#\{E_{kl} \mid (k, l) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}\} = \#\mathcal{I} \#\mathcal{J} < \infty$ gilt. Damit ist $\mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ endlich-dimensional, womit $\mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ in Verbindung mit der Frobenius-Norm $\|\cdot\|_F$ nach [20, Satz 2.5] ein vollständiger normierter Raum — also ein *Banach-Raum* — ist.

Durch die Definition der Frobenius-Norm über das Frobenius-Skalarprodukt (vgl. Definition 2.1.11) wird $(\mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$ zu einem Hilbertraum. □

Eine spezielle Klasse bilden die *orthogonalen Matrizen*. Diese zeichnen sich unter anderem dadurch aus, dass sie sowohl die euklidische Norm eines Vektors als auch die Frobenius-Norm einer Matrix unverändert lassen.

Definition 2.1.14 (Orthogonale Matrix). *Seien \mathcal{I} und \mathcal{J} zwei endliche Indexmengen. Wir nennen eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ orthogonal, wenn diese der Gleichung*

$$Q^* Q = I$$

genügt.

Korollar 2.1.15 (Norminvarianz). *Seien \mathcal{I} , \mathcal{J} und \mathcal{K} endliche Indexmengen. Für alle $Q \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, $P \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{K}}$ und $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{K}}$ mit Q sowie P orthogonal gilt*

$$(a) \quad \|QAP^*\|_F = \|QA\|_F = \|AP^*\|_F = \|A\|_F \text{ sowie}$$

$$(b) \quad \|Qx\|_2 = \|x\|_2 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^{\mathcal{J}}.$$

2 Grundlagen

Beweis. Seien $Q \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $P \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{K}}$ orthogonal sowie $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{K}}$.

(a) Unter Verwendung von Korollar 2.1.12 gilt

$$\begin{aligned} \|QAP^*\|_F^2 &= \langle QAP^*, QAP^* \rangle_F = \langle QAP^*P, QA \rangle_F = \langle QA, QA \rangle_F \\ &= \|QA\|_F^2 = \langle QA, QA \rangle_F = \langle A, Q^*QAP^*P \rangle_F = \langle AP^*, AP^* \rangle_F \\ &= \|AP^*\|_F^2 = \langle AP^*, AP^* \rangle_F = \langle A, AP^*P \rangle_F = \langle A, A \rangle_F \\ &= \|A\|_F^2 \end{aligned}$$

und damit durch $\|X\|_F \geq 0$ für alle $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ die Aussage.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$, dann gilt

$$\|Qx\|_2^2 = \langle Qx, Qx \rangle_2 = \langle x, Q^*Qx \rangle_2 = \langle x, x \rangle_2 = \|x\|_2^2,$$

also auch hier mit $\|Qx\|_2 \geq 0$ und $\|x\|_2 \geq 0$ die Aussage. \square

Bevor wir uns einigen grundlegenden Eigenschaften von Matrixgleichungen zuwenden, definieren wir noch sogenannte *Niedrigrangmatrizen*, wie sie z.B. in [35, Kapitel 2] zu finden sind und im weiteren Verlauf dieser Arbeit für lokale Approximationen vollbesetzter Matrizen benötigt werden.

Definition 2.1.16 (Niedrigrangmatrix). *Seien \mathcal{I} , \mathcal{J} und κ endliche Indexmengen sowie $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ eine Matrix. Existieren $U \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \kappa}$ und $V \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \kappa}$ so, dass*

$$A = UV^*$$

gilt, dann nennen wir A eine Niedrigrangmatrix mit Rang $\# \kappa$ und UV^ eine Niedrigrangdarstellung von A .*

Es ist in obiger Definition zu beachten, dass für alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ eine Niedrigrangdarstellung durch AI^* gegeben ist — also mit $\kappa = \mathcal{J}$. Gilt für eine Niedrigrangmatrix allerdings $\# \kappa \ll \# \mathcal{I}$ und $\# \kappa \ll \# \mathcal{J}$, so müssen im Vergleich zur vollbesetzten Matrix A — mit $\# \mathcal{I} \# \mathcal{J}$ benötigten Speicherplätzen — wesentlich weniger Einträge gespeichert werden — nämlich $\# \kappa (\# \mathcal{I} + \# \mathcal{J})$ für U und V zusammen. Die Matrix A lässt sich dann aus U und V rekonstruieren. Diese Sichtweise begründet die Bezeichnungen *Niedrigrangmatrix* bzw. *Niedrigrangdarstellung*.

2.2 Matrixgleichungen

Die folgenden Betrachtungen orientieren sich an [37, Chapter 4], beschränken sich für die Herleitung der später benötigten Hilfsmittel allerdings auf eine *lineare Matrixgleichung* der Form

$$AXB^* = C \tag{2.1}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$, $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ sowie rechter Seite $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und gesuchter Lösung $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Hierbei bezeichnen \mathcal{I} und \mathcal{J} zwei endliche Indexmengen. Die folgende Diskussion

ließe sich allerdings auch auf lineare Matrixgleichungen der Form

$$\sum_{i=1}^N A_i X B_i^* = C \quad (2.2)$$

mit $N \in \mathbb{N}$ sowie $A_i \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B_i \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ erweitern.

Kronecker-Produkte

Eine Möglichkeit zur Auflösung von (2.1) ist die Umformulierung der dortigen Gleichung in ein höherdimensionales Gleichungssystem unter Zuhilfenahme des *Kronecker-Produkts* (vgl. z.B. [37, Definition 4.2.1]) und der *Vektorabbildung* (vgl. z.B. [37, Definition 4.2.9]). Mit dem Kronecker-Produkt bezeichnen wir das Tensor-Produkt von Matrizen. Da das Tensor-Produkt im Folgenden auch überwiegend nur im Kontext von Matrizen auftritt, wird auf eine allgemeine Definition verzichtet. Diese ist z.B. — wie in der Einleitung bereits erwähnt — in [36, Abschnitt 3.2] zu finden, wo auch der Zusammenhang zu dem nachstehend definierten Kronecker-Produkt verdeutlicht wird [36, Abschnitt 3.2.3]. Aufgrund dieser Verbindung werden wir wie in Kapitel 1 das Zeichen \otimes verwenden.

Definition 2.2.1 (Kronecker-Produkt). *Seien $\mathcal{I}_1, \mathcal{J}_1, \mathcal{I}_2$ und \mathcal{J}_2 endliche Indermengen, dann definieren wir das Kronecker-Produkt*

$$\otimes : \mathbb{R}^{\mathcal{I}_1 \times \mathcal{J}_1} \times \mathbb{R}^{\mathcal{I}_2 \times \mathcal{J}_2} \rightarrow \mathbb{R}^{(\mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2) \times (\mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2)}, \quad (X, Y) \mapsto X \otimes Y$$

für alle $(X, Y) \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}_1 \times \mathcal{J}_1} \times \mathbb{R}^{\mathcal{I}_2 \times \mathcal{J}_2}$ durch

$$(X \otimes Y)_{(i,j)(k,l)} := x_{ik} y_{jl}$$

für alle $(i, j) \in \mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2$ und $(k, l) \in \mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2$.

Definition 2.2.2 (Vektorabbildung). *Seien \mathcal{I} und \mathcal{J} zwei endliche Indermengen, dann definieren wir die Vektorabbildung*

$$\text{vec} : \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}^{(\mathcal{J} \times \mathcal{I})}, \quad X \mapsto \text{vec}(X) \quad (2.3)$$

für alle $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ durch

$$\text{vec}(X)_{(i,j)} := x_{ji}$$

für alle $(i, j) \in \mathcal{J} \times \mathcal{I}$.

Man sieht schnell ein, dass die Vektorabbildung aus obiger Definition eine bijektive, lineare Abbildung darstellt. Wir können also jedem Vektor des Bildraums auf eindeutige Weise eine Matrix des Urbildraums zuordnen.

Bemerkung 2.2.3 (Darstellung der Komponenten). *Seien $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ sowie $\mathcal{I}_1 := \{1, \dots, m\}$, $\mathcal{J}_1 := \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{I}_2 := \{1, \dots, p\}$ und $\mathcal{J}_2 := \{1, \dots, q\}$. Für alle kartesischen*

2 Grundlagen

Produkte dieser Mengen verwenden wir die lexikographische Ordnung, dann gilt für $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}_1 \times \mathcal{J}_1}$ und $Y \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}_2 \times \mathcal{J}_2}$ die Darstellung

$$X \otimes Y = \begin{pmatrix} x_{11}Y & \cdots & x_{1n}Y \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1}Y & \cdots & x_{mn}Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(\mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2) \times (\mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2)}.$$

Bezeichnen wir mit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}_1}$ die Spalten von X — also $X = (x_1 \ \cdots \ x_n)$ —, dann gilt

$$\text{vec}(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(\mathcal{J}_1 \times \mathcal{I}_1)}.$$

In dem folgenden Lemma tragen wir einige nützliche Eigenschaften des Kronecker-Produkts und der Vektorabbildung zusammen.

Lemma 2.2.4 (Eigenschaften). Seien $\mathcal{I}_1, \mathcal{J}_1, \mathcal{I}_2$ und \mathcal{J}_2 endliche Indermengen sowie $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}_1 \times \mathcal{J}_1}$ und $Y \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}_2 \times \mathcal{J}_2}$, dann gilt

$$(a) \ (X \otimes Y)^* = X^* \otimes Y^*,$$

$$(b) \ \langle X, Y \rangle_F = \langle \text{vec}(X), \text{vec}(Y) \rangle_2 \text{ und } \|X\|_F = \|\text{vec}(X)\|_2, \text{ falls } \mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 \text{ und } \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2, \text{ sowie}$$

$$(c) \ \sigma(X \otimes Y) = \{\lambda\mu \mid \lambda \in \sigma(X) \text{ und } \mu \in \sigma(Y)\}, \text{ falls } \mathcal{I}_1 = \mathcal{J}_1 \text{ und } \mathcal{I}_2 = \mathcal{J}_2.$$

Beweis. (a) Wir zeigen die Gleichheit komponentenweise. Für alle $(i, j) \in \mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2$ und $(k, l) \in \mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2$ gilt

$$((X \otimes Y)^*)_{(i,j)(k,l)} = (X \otimes Y)_{(k,l)(i,j)} = x_{ki}y_{lj} = x_{ik}^*y_{jl}^* = (X^* \otimes Y^*)_{(i,j)(k,l)}.$$

(b) Mit $\mathcal{I} := \mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2$ und $\mathcal{J} := \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$ gilt

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle_F &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}} x_{ij}y_{ij} = \sum_{(i,j) \in \mathcal{J} \times \mathcal{I}} x_{ji}y_{ji} \\ &= \sum_{(i,j) \in \mathcal{J} \times \mathcal{I}} \text{vec}(X)_{(i,j)} \text{vec}(Y)_{(i,j)} = \langle \text{vec}(X), \text{vec}(Y) \rangle_2 \end{aligned}$$

und damit auch

$$\|X\|_F = \sqrt{\langle X, X \rangle_F} = \sqrt{\langle \text{vec}(X), \text{vec}(X) \rangle_2} = \|\text{vec}(X)\|_2.$$

(c) Siehe [37, Lemma 4.2.12]. □

Wie sich eine Matrixgleichung unter Verwendung des Kronecker-Produkts und der Vektorabbildung als gewöhnliches lineares Gleichungssystem — also in Matrix-Vektor-Form — schreiben lässt, zeigt das nachstehende Lemma (vgl. auch [37, Lemma 4.3.1]).

Lemma 2.2.5 (Matrixgleichung). *Seien \mathcal{I} und \mathcal{J} zwei endliche Indexmengen, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$, $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ sowie $X, C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, dann gilt*

$$AXB^* = C \quad \text{genau dann, wenn} \quad (B \otimes A) \text{vec}(X) = \text{vec}(C).$$

Beweis. „ \Rightarrow “: Es gelte $AXB^* = C$. Nach Definition folgt $B \otimes A \in \mathbb{R}^{(\mathcal{J} \times \mathcal{I}) \times (\mathcal{J} \times \mathcal{I})}$ sowie $\text{vec}(X), \text{vec}(C) \in \mathbb{R}^{(\mathcal{J} \times \mathcal{I})}$. Wir zeigen die zu beweisende Gleichheit komponentenweise. Sei dazu $(i, j) \in \mathcal{J} \times \mathcal{I}$, dann gilt

$$\begin{aligned} ((B \otimes A) \text{vec}(X))_{(i,j)} &= \sum_{(k,l) \in \mathcal{J} \times \mathcal{I}} (B \otimes A)_{(i,j)(k,l)} \text{vec}(X)_{(k,l)} \\ &= \sum_{(k,l) \in \mathcal{J} \times \mathcal{I}} b_{ik} a_{jl} x_{lk} = \sum_{l \in \mathcal{I}} \sum_{k \in \mathcal{J}} a_{jl} x_{lk} b_{ki}^* \\ &= (AXB^*)_{ji} = c_{ji} = \text{vec}(C)_{(i,j)}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

also

$$(B \otimes A) \text{vec}(X) = \text{vec}(C).$$

„ \Leftarrow “: Da in (2.4) nur Gleichungen stehen, folgt die Aussage analog. \square

Mit der Linearität der Vektorabbildung gilt für die zu Beginn dieses Abschnitts formulierte Matrixgleichung (2.2)

$$\sum_{i=1}^N A_i X B_i^* = C \quad \text{genau dann, wenn} \quad \sum_{i=1}^N (B_i \otimes A_i) \text{vec}(X) = \text{vec}(C).$$

2.3 Variationsformulierungen

Der vorliegende Abschnitt stellt das grundlegende Konzept der *Variationsformulierungen* zur Verfügung, welches für die Herleitung des allgemeinen Matrix-Galerkin-Verfahrens in Abschnitt 4.1 benötigt wird. Dieses Konzept kommt insbesondere im Zusammenhang mit der Theorie der finiten Elemente zur Anwendung (vgl. auch Kapitel 1). Für eine ausführlichere Analyse der hier skizzierten Techniken sei z.B. auf [48, 15] verwiesen. Die im Folgenden verwendeten Aussagen und Notationen orientieren sich überwiegend an [48, Kapitel 3 und Kapitel 8].

Kontinuierliche Variationsformulierungen

Wir betrachten einen Hilbertraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ mit Dualraum V' sowie einen linearen Operator

$$\mathcal{A} : V \rightarrow V'. \tag{2.5}$$

Die durch $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ induzierte Norm bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_V := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_V}$ und die *Operatornorm* in V' mit $\|\cdot\|_{V'}$ — siehe z.B. [20, Definition 2.11] für eine Definition der Operatornorm.

2 Grundlagen

Für eine vorgegebene rechte Seite $f \in V'$ ist eine Lösung $u \in V$ der Operatorgleichung

$$\mathcal{A}u = f \quad (2.6)$$

gesucht. Es lässt sich zeigen, dass (2.6) mit der dualen Paarung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ äquivalent zu der Bestimmung einer Lösung $u \in V$ der *Variationsformulierung*

$$\langle \mathcal{A}u, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V \quad (2.7)$$

ist (siehe z.B. [48, Abschnitt 3.1]). Aufgrund der Linearität des Operators \mathcal{A} definiert die Abbildung

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto \langle \mathcal{A}u, v \rangle$$

eine Bilinearform. Mit (2.7) ist die Bestimmung einer Lösung damit auch äquivalent zu der Bestimmung von $u \in V$ mit

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V. \quad (2.8)$$

Definition 2.3.1 (Stetig und koerziv). *Sei V ein Hilbertraum und $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform, dann nennen wir diese*

(i) C_s -stetig, falls eine Konstante $C_s \in \mathbb{R}_{>0}$ so existiert, dass

$$|a(u, v)| \leq C_s \|u\|_V \|v\|_V \quad \text{für alle } u, v \in V$$

gilt und

(ii) C_k -koerziv, falls eine Konstante $C_k \in \mathbb{R}_{>0}$ so existiert, dass

$$a(v, v) \geq C_k \|v\|_V^2 \quad \text{für alle } v \in V$$

gilt.

Verwenden wir diese Begriffe ohne C_s bzw. C_k einzuführen, so setzen wir implizit voraus, dass $C_s \in \mathbb{R}_{>0}$ bzw. $C_k \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt.

Existenz, Eindeutigkeit sowie Stabilität einer Lösung von (2.8) garantiert das *Lemma von Lax-Milgram*.

Lemma 2.3.2 (Lax-Milgram). *Sei V ein Hilbertraum und $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine C_s -stetige sowie C_k -koerzive Bilinearform, dann besitzt (2.8) für alle $f \in V'$ eine eindeutige Lösung $u \in V$ und es gilt*

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{C_k} \|f\|_{V'}.$$

Beweis. Siehe [48, Satz 3.2]. □

Galerkin-Variationsformulierungen

Ausgehend von (2.8) ist nun eine Approximation der Lösung $u \in V$ gesucht. Hierzu wählen wir einen Teilraum $V_h \subseteq V$ und berechnen eine Lösung $u_h \in V_h$ der *Galerkin-Variationsformulierung*

$$a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle \quad \text{für alle } v_h \in V_h. \quad (2.9)$$

Wir nennen $u_h \in V_h$ auch *Galerkin-Lösung*. Für die Formulierung (2.9) bildet das *Lemma von C  a* das Gegenstück zu dem Lemma von Lax-Milgram. Zusätzlich wird dort eine Aussage über den Fehler getroffen, der durch das Ersetzen von V durch V_h entsteht.

Lemma 2.3.3 (C  a). *Sei V ein Hilbertraum und $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ein C_s -stetige sowie C_k -koerzive Bilinearform, dann besitzt (2.9) für alle $f \in V'$ eine eindeutige Lösung $u_h \in V_h$ und es gilt*

$$\|u_h\|_V \leq \frac{1}{C_k} \|f\|_{V'}.$$

Mit der eindeutigen Lösung $u \in V$ von (2.8) gilt außerdem

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C_s}{C_k} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

Beweis. Siehe [48, Satz 8.1]. □

Bemerkung 2.3.4 (Verbesserte Abschätzung und Energienorm). *Es seien die Voraussetzungen von Lemma 2.3.3 gegeben und die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ sei zusätzlich symmetrisch, dann folgt nach [17, Chapitre II Proposition 3.1] für die Fehlerabschätzung der Galerkin-Lösung die verbesserte Abschätzung*

$$\|u - u_h\|_V \leq \sqrt{\frac{C_s}{C_k}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

und mit der durch $\|v\|_a := \sqrt{a(v, v)}$ für alle $v \in V$ definierten Energienorm (vgl. [15, (2.14)]) nach [17, (3.12)]

$$\|u - u_h\|_a \leq \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_a.$$

2.4 Bäume

Eine für diese Arbeit grundlegende und im Kontext der \mathcal{H}^2 -Matrix-Theorie fundamentale Struktur ist die eines *Baums*. Dieser Abschnitt widmet sich dessen Einführung in einer für die folgenden Betrachtungen angepassten Form. Es sei darauf hingewiesen, dass es verschiedene Varianten gibt, Bäume einzuführen. Der hier verwendete Ausgangspunkt der Analyse orientiert sich überwiegend an den Definitionen und Notationen aus [6, Chapter 3].

2 Grundlagen

Definition 2.4.1 (Baum). Ein Tupel $\mathcal{T} := (V, \text{sons}, \text{root})$ bestehend aus einer endlichen Menge V mit Potenzmenge $\mathcal{P}(V)$, einer Abbildung

$$\text{sons} : V \rightarrow \mathcal{P}(V)$$

(auch Sohnabbildung genannt) und einem Element $\text{root} \in V$ heißt Baum, wenn für jedes $v \in V$ ein eindeutiges $\ell \in \mathbb{N}_0$ und eindeutige $v_0, \dots, v_\ell \in V$ mit

$$v_0 = \text{root} \quad \text{und} \quad v_\ell = v$$

sowie

$$v_i \in \text{sons}(v_{i-1}) \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, \ell\}$$

existieren. Das ausgezeichnete Element $\text{root} \in V$ nennen wir Wurzel des Baums und schreiben für dieses auch $\text{root}(\mathcal{T})$. Des Weiteren nennen wir die Elemente von V Knoten und für alle $v \in V$ die Elemente der Menge $\text{sons}(v)$ Söhne von v . Wenn aus der Bezeichnung \mathcal{T} klar hervorgeht, welches Tupel $(V, \text{sons}, \text{root})$ zugrundeliegt, schreiben wir auch $v \in \mathcal{T}$ anstatt $v \in V$, identifizieren \mathcal{T} also mit V .

Pfade

Definition 2.4.2 (Pfad). Seien \mathcal{T} ein Baum und $v, w \in \mathcal{T}$. Existieren ein $\ell \in \mathbb{N}_0$ und $v_0, \dots, v_\ell \in \mathcal{T}$ mit

$$v_i \in \text{sons}(v_{i-1}) \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, \ell\}$$

sowie $v_0 = v$ und $v_\ell = w$, dann nennen wir das Tupel (v_0, \dots, v_ℓ) einen Pfad von v nach w . Die Zahl ℓ nennen wir Länge des Pfads.

Mit dieser Namensgebung zeichnet sich nach Definition 2.4.1 ein Baum unter anderem dadurch aus, dass ein eindeutiger Pfad von der Wurzel zu jedem anderen Element des Baums existiert. Damit lässt sich in dem nächsten Korollar folgern, dass alle Pfade — sofern sie existieren — eindeutig sein müssen.

Korollar 2.4.3 (Eindeutigkeit von Pfaden). Seien \mathcal{T} ein Baum, $v, w \in \mathcal{T}$ und (v_0, \dots, v_ℓ) mit $\ell \in \mathbb{N}_0$ ein Pfad von v nach w , dann ist dieser Pfad eindeutig.

Beweis. Gilt $v = \text{root}(\mathcal{T})$, dann folgt die Eindeutigkeit direkt aus der Definition 2.4.1 eines Baums. Sei also $v \neq \text{root}(\mathcal{T})$ vorausgesetzt und $(\tilde{v}_0, \dots, \tilde{v}_{\tilde{\ell}})$ mit $\tilde{\ell} \in \mathbb{N}_0$ ein weiterer Pfad von v nach w . Da \mathcal{T} ein Baum ist, existiert ein eindeutiger Pfad (r_0, \dots, r_n) mit $n \in \mathbb{N}_0$ von $\text{root}(\mathcal{T})$ nach v . Mit $v \neq \text{root}(\mathcal{T})$ gilt $n > 0$, also $n - 1 \geq 0$. Es folgt $\tilde{v}_0 = v_0 = v = r_n \in \text{sons}(r_{n-1})$, womit

$$(r_0, \dots, r_{n-1}, v_0, \dots, v_\ell) \quad \text{und} \quad (r_0, \dots, r_{n-1}, \tilde{v}_0, \dots, \tilde{v}_{\tilde{\ell}}) \quad (2.10)$$

jeweils Pfade von $\text{root}(\mathcal{T})$ nach w sind. Laut Definition eines Baums gibt es genau einen Pfad von der Wurzel $\text{root}(\mathcal{T})$ nach w , womit die beiden Pfade aus (2.10) gleich sein müssen. Insbesondere folgt dann

$$(v_0, \dots, v_\ell) = (\tilde{v}_0, \dots, \tilde{v}_{\tilde{\ell}})$$

und damit die Aussage. □

Bemerkung 2.4.4 (Eigener Sohn). Sei \mathcal{T} ein Baum, dann folgt aus der Eindeutigkeit von Pfaden in \mathcal{T} , dass kein Knoten Sohn von sich selbst sein kann.

Angenommen es existiert ein $v \in \mathcal{T}$ mit $v \in \text{sons}(v)$, dann wären mit $v_0 := v_1 := v$

$$(v_0) \quad \text{und} \quad (v_0, v_1)$$

zwei unterschiedliche Pfade von v nach v . Dies steht im Widerspruch zur Eindeutigkeit, womit $v \notin \text{sons}(v)$ für alle $v \in \mathcal{T}$ folgt.

Bemerkung 2.4.5 (Knoten in Pfaden). Seien \mathcal{T} ein Baum, $v, w \in \mathcal{T}$ und (v_0, \dots, v_ℓ) mit $\ell \in \mathbb{N}_0$ ein Pfad von v nach w . Mit der vorherigen Bemerkung 2.4.4 gilt, dass alle aufeinanderfolgenden Knoten dieses Pfads nicht gleich sein können. Würde $v_i = v_{i-1}$ für ein $i \in \{1, \dots, \ell\}$ gelten, dann nach Definition eines Pfads auch $v_i \in \text{sons}(v_{i-1}) = \text{sons}(v_i)$. Da dies ein Widerspruch zu Bemerkung 2.4.4 ist, folgt

$$v_i \neq v_{i-1} \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, \ell\}.$$

Vater

Korollar 2.4.6. Sei \mathcal{T} ein Baum. Für alle $v \in \mathcal{T} \setminus \{\text{root}(\mathcal{T})\}$ existiert genau ein $v^+ \in \mathcal{T}$ mit

$$v \in \text{sons}(v^+).$$

Beweis. Sei $v \in \mathcal{T} \setminus \{\text{root}(\mathcal{T})\}$. Da \mathcal{T} ein Baum ist, existiert ein eindeutiger Pfad (v_0, \dots, v_ℓ) mit $\ell \in \mathbb{N}_0$ von $\text{root}(\mathcal{T})$ nach v . Mit $v \neq \text{root}(\mathcal{T})$ folgt $v_0 \neq v_\ell$, also $\ell > 0$ bzw. $\ell - 1 \geq 0$. Nach Definition eines Pfads gilt

$$v = v_\ell \in \text{sons}(v_{\ell-1}).$$

Durch die Eindeutigkeit des Pfads folgt die Aussage mit $v^+ := v_{\ell-1}$. \square

Das durch die Aussage des Korollars 2.4.6 ausgezeichnete Element verstehen wir in Anlehnung an die Bezeichnung *Söhne* in der nachstehenden Definition mit dem Namen *Vater*.

Definition 2.4.7 (Vater). Sei \mathcal{T} ein Baum. Für alle $v \in \mathcal{T} \setminus \{\text{root}(\mathcal{T})\}$ nennen wir das eindeutige Element $v^+ \in \mathcal{T}$ mit $v \in \text{sons}(v^+)$ Vater von v und setzen

$$\text{father}(v) := v^+.$$

Erweiterte Söhne und erweiterte Pfade

Ein Element eines Baums kann entweder Söhne haben, oder die Menge der Söhne ist leer. In späteren Betrachtungen wird es nötig sein im Fall des Nichtvorhandenseins von Söhnen das Element selbst festzuhalten. Aus diesem Grund führen wir mit der nächsten Definition die Menge der *erweiterten Söhne* ein, die überwiegend der Vermeidung von Fallunterscheidungen dient. Zusätzlich werden wir im Anschluss an diese Definition Aussagen beweisen, die sich im weiteren Verlauf dieser Arbeit als hilfreich erweisen werden.

2 Grundlagen

Definition 2.4.8 (Erweiterte Söhne). Sei \mathcal{T} ein Baum. Für alle $v \in \mathcal{T}$ nennen wir

$$\text{sons}^+(v) := \begin{cases} \{v\} & , \text{ falls } \text{sons}(v) = \emptyset, \\ \text{sons}(v) & \text{sonst} \end{cases}$$

die Menge der erweiterten Söhne von v .

In Analogie zu Definition 2.4.2 lassen sich auch Pfade unter Verwendung der erweiterten Söhne — sogenannte *erweiterte Pfade* — definieren.

Definition 2.4.9 (Erweiterter Pfad). Seien \mathcal{T} ein Baum und $v, w \in \mathcal{T}$. Existieren ein $\ell \in \mathbb{N}_0$ und $v_0, \dots, v_\ell \in \mathcal{T}$ mit

$$v_i \in \text{sons}^+(v_{i-1}) \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, \ell\}$$

sowie $v_0 = v$ und $v_\ell = w$, dann nennen wir das Tupel (v_0, \dots, v_ℓ) einen erweiterten Pfad von v nach w . Die Zahl ℓ nennen wir Länge des erweiterten Pfads.

Diese Definition unterscheidet sich somit von der Definition 2.4.2 eines Pfads lediglich durch die Verwendung der erweiterten Söhne sons^+ anstatt der Söhne sons . Wann ein erweiterter Pfad ein Pfad ist, zeigt folgendes Lemma.

Lemma 2.4.10 (Gleichheit). Seien \mathcal{T} ein Baum, $v, w \in \mathcal{T}$ und (v_0, \dots, v_ℓ) mit $\ell \in \mathbb{N}_0$ ein erweiterter Pfad von v nach w . (v_0, \dots, v_ℓ) ist genau dann ein Pfad von v nach w , wenn

$$\ell = 0 \quad \text{oder} \quad \text{sons}(v_{\ell-1}) \neq \emptyset \quad \text{für } \ell \geq 1$$

gilt.

Beweis. „ \Rightarrow “: Es sei (v_0, \dots, v_ℓ) ein Pfad von v nach w . Gilt $\ell = 0$, so folgt die Aussage direkt und für $\ell \geq 1$ folgt $\text{sons}(v_{\ell-1}) \neq \emptyset$ aus $v_\ell \in \text{sons}(v_{\ell-1})$.

„ \Leftarrow “: Gilt $\ell = 0$, dann folgt $v = v_0 = w$, womit (v_0) nach Definition ein Pfad von v nach w ist.

Sei nun $\ell \geq 1$ und $\text{sons}(v_{\ell-1}) \neq \emptyset$. Es bleibt nachzuweisen, dass $\text{sons}^+(v_i) = \text{sons}(v_i)$ für alle $i \in \{0, \dots, \ell - 1\}$ gilt. Dies ist äquivalent zu

$$\text{sons}(v_i) \neq \emptyset \quad \text{für alle } i \in \{0, \dots, \ell - 1\},$$

was wir per Induktion zeigen. Für $i = \ell - 1$ folgt $\text{sons}(v_i) \neq \emptyset$ direkt aus der Voraussetzung. Es gelte nun für ein $i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$

$$\text{sons}(v_j) \neq \emptyset \quad \text{für alle } j \in \{i, \dots, \ell - 1\}.$$

Wir zeigen $\text{sons}(v_{i-1}) \neq \emptyset$. Angenommen es gilt $\text{sons}(v_{i-1}) = \emptyset$, dann folgt mit $v_i \in \text{sons}^+(v_{i-1}) = \{v_{i-1}\}$ auch $v_i = v_{i-1}$. Insbesondere gilt dann

$$\text{sons}(v_i) = \text{sons}(v_{i-1}) = \emptyset,$$

was im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung steht. Es folgt also $\text{sons}(v_{i-1}) \neq \emptyset$ und damit die Aussage. \square

Lemma 2.4.11. *Seien \mathcal{T} ein Baum, $v, w \in \mathcal{T}$ und (v_0, \dots, v_ℓ) mit $\ell \in \mathbb{N}_0$ ein erweiterter Pfad von v nach w . Gilt $\text{sons}(v_i) = \emptyset$ für ein $i \in \{0, \dots, \ell\}$, dann folgt*

$$v_j = v_i \quad \text{für alle } j \in \{i, \dots, \ell\}.$$

Beweis. Sei $i \in \{0, \dots, \ell\}$ mit $\text{sons}(v_i) = \emptyset$. Wir zeigen die Aussage per Induktion über die Menge $\{i, \dots, \ell\}$.

Für $\tilde{\ell} = i$ folgt die Aussage direkt aus der Voraussetzung. Sei nun $\tilde{\ell} \in \{i, \dots, \ell - 1\}$ so gegeben, dass

$$v_j = v_i \quad \text{für alle } j \in \{i, \dots, \tilde{\ell}\}$$

gilt. Die Induktionsvoraussetzung liefert somit insbesondere $v_{\tilde{\ell}} = v_i$, also

$$\text{sons}(v_{\tilde{\ell}}) = \text{sons}(v_i) = \emptyset.$$

Mit der Definition eines erweiterten Pfads folgt dann

$$v_{\tilde{\ell}+1} \in \text{sons}^+(v_{\tilde{\ell}}) = \{v_{\tilde{\ell}}\}$$

und damit $v_{\tilde{\ell}+1} = v_{\tilde{\ell}} = v_i$, also die Aussage. \square

Bemerkung 2.4.12 (Söhne und erweiterte Söhne). *Es seien die Voraussetzungen von Lemma 2.4.11 gegeben, dann folgt mit $\tilde{v} \notin \text{sons}(\tilde{v})$ für alle $\tilde{v} \in \mathcal{T}$ auch*

$$\text{sons}(v_j) = \emptyset \quad \text{und} \quad \text{sons}^+(v_j) = \{v_j\} = \{v_i\}$$

für alle $j \in \{i, \dots, \ell\}$.

Lemma 2.4.13 (Pfad in erweitertem Pfad). *Seien \mathcal{T} ein Baum, $v, w \in \mathcal{T}$ zwei Knoten und (v_0, \dots, v_{ℓ^+}) mit $\ell^+ \in \mathbb{N}_0$ ein erweiterter Pfad von v nach w , dann existiert ein $\ell \leq \ell^+$ so, dass (v_0, \dots, v_ℓ) ein Pfad von v nach w ist. Gilt zusätzlich $\ell < \ell^+$, dann folgt $\text{sons}(v_\ell) = \emptyset$.*

Beweis. Gilt $\text{sons}(v_i) \neq \emptyset$ für alle $i \in \{0, \dots, \ell^+\}$, dann ist (v_0, \dots, v_{ℓ^+}) ein Pfad von v nach w und der erste Teil der Aussage folgt mit $\ell := \ell^+$. Der zweite Teil ist in diesem Fall trivialerweise erfüllt.

Es existiere nun mindestens ein $i \in \{0, \dots, \ell^+\}$ mit $\text{sons}(v_i) = \emptyset$. Wir setzen

$$\ell := \min\{i \in \{0, \dots, \ell^+\} \mid \text{sons}(v_i) = \emptyset\}, \quad (2.11)$$

dann gilt $\text{sons}(v_{i-1}) \neq \emptyset$ für alle $i \in \{1, \dots, \ell\}$ nach Wahl von ℓ . Lemma 2.4.11 liefert

$$v_i = v_\ell \quad \text{für alle } i \in \{\ell, \dots, \ell^+\},$$

also insbesondere $v_\ell = v_{\ell^+} = w$. Mit

$$v_i \in \text{sons}^+(v_{i-1}) = \text{sons}(v_{i-1}) \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, \ell\}$$

ist (v_0, \dots, v_ℓ) damit ein Pfad von v nach w . Da dieser Pfad eindeutig ist (vgl. Korollar 2.4.3), folgt im Fall von $\ell < \ell^+$ mit dem durch (2.11) eindeutig bestimmten ℓ insbesondere $\text{sons}(v_\ell) = \emptyset$ und somit die Aussage. \square

Vor- und Nachfahren

Definition 2.4.14 (Vor- und Nachfahren). Sei \mathcal{T} ein Baum. Für alle $v \in \mathcal{T}$ nennen wir

$$\text{pred}(v) := \{v^+ \in \mathcal{T} \mid \text{Es existiert ein Pfad von } v^+ \text{ nach } v.\}$$

die Menge der Vorfahren von v sowie

$$\text{sons}^*(v) := \{v^* \in \mathcal{T} \mid \text{Es existiert ein Pfad von } v \text{ nach } v^*.\}$$

die Menge der Nachfahren von v .

Bemerkung 2.4.15. Für jedes Element eines Baums existiert ein (eindeutiger) Pfad von der Wurzel zu diesem Element. Mit Definition 2.4.14 bedeutet dies, dass die Wurzel Vorfahre eines jeden Elements und jedes Element Nachfahre der Wurzel ist.

Korollar 2.4.16 (Teilmengen). Sei \mathcal{T} ein Baum, dann gilt für alle $v \in \mathcal{T}$

$$(a) \ v^+ \in \text{pred}(v) \Rightarrow \text{pred}(v^+) \subseteq \text{pred}(v) \text{ und}$$

$$(b) \ v^* \in \text{sons}^*(v) \Rightarrow \text{sons}^*(v^*) \subseteq \text{sons}^*(v).$$

Beweis. Sei $v \in \mathcal{T}$.

(a) Sei $v^+ \in \text{pred}(v)$. Gilt $v^+ = v$, folgt $\text{pred}(v^+) = \text{pred}(v)$ und damit die Aussage. Es gelte also $v^+ \neq v$ und es sei $v^{++} \in \text{pred}(v^+)$. Wir zeigen, dass $v^{++} \in \text{pred}(v)$ gilt.

Nach Definition existieren ein Pfad $(v_0^{++}, \dots, v_{\ell^{++}}^{++})$ mit $\ell^{++} \in \mathbb{N}_0$ von v^{++} nach v^+ und ein Pfad $(v_0^+, \dots, v_{\ell^+}^+)$ mit $\ell^+ \in \mathbb{N}_0$ von v^+ nach v . Da $v^+ \neq v$ gilt, folgt $\ell^+ > 0$, also $\ell^+ \geq 1$. Mit $v_{\ell^{++}}^{++} = v^+ = v_0^+$ gilt $v_1^+ \in \text{sons}(v_0^+) = \text{sons}(v_{\ell^{++}}^{++})$. Damit ist

$$(v_0^{++}, \dots, v_{\ell^{++}}^{++}, v_1^+, \dots, v_{\ell^+}^+)$$

ein Pfad von v^{++} nach v , womit $v^{++} \in \text{pred}(v)$ und insgesamt

$$\text{pred}(v^+) \subseteq \text{pred}(v)$$

folgt.

(b) Seien $v^* \in \text{sons}^*(v)$ und $v^{**} \in \text{sons}^*(v^*)$, dann existieren Pfade von v nach v^* und von v^* nach v^{**} . Dies bedeutet $v \in \text{pred}(v^*)$ und $v^* \in \text{pred}(v^{**})$, womit nach Teil (a)

$$\text{pred}(v) \subseteq \text{pred}(v^*) \subseteq \text{pred}(v^{**})$$

folgt. Aufgrund von $v \in \text{pred}(v)$ gilt dann $v \in \text{pred}(v^{**})$. Es existiert also ein Pfad von v nach v^{**} , was $v^{**} \in \text{sons}^*(v)$ und somit die zu beweisende Aussage

$$\text{sons}^*(v^*) \subseteq \text{sons}^*(v)$$

liefert. □

Einen Zusammenhang zwischen Vor- und Nachfahren — welcher insbesondere die Namensgebung rechtfertigt — illustriert das folgende Korollar.

Korollar 2.4.17 (Zusammenhang der Vor- und Nachfahren). *Sei \mathcal{T} ein Baum, dann gilt für alle $v \in \mathcal{T}$*

$$(a) \text{ pred}(v) = \{v^+ \in \mathcal{T} \mid v \in \text{sons}^*(v^+)\} \text{ und}$$

$$(b) \text{ sons}^*(v) = \{v^* \in \mathcal{T} \mid v \in \text{pred}(v^*)\}.$$

Beweis. Für alle $v, w \in \mathcal{T}$, für die ein Pfad von v nach w existiert, gilt nach Definition $w \in \text{sons}^*(v)$ und $v \in \text{pred}(w)$. Damit folgt für alle $v \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned} \text{pred}(v) &= \{v^+ \in \mathcal{T} \mid \text{Es existiert ein Pfad von } v^+ \text{ nach } v.\} \\ &= \{v^+ \in \mathcal{T} \mid v \in \text{sons}^*(v^+)\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{sons}^*(v) &= \{v^* \in \mathcal{T} \mid \text{Es existiert ein Pfad von } v \text{ nach } v^*.\} \\ &= \{v^* \in \mathcal{T} \mid v \in \text{pred}(v^*)\}, \end{aligned}$$

also die Aussagen in (a) und (b). \square

Für die Elemente eines Baums lässt sich die Menge der Vorfahren unter Zuhilfenahme der Elemente eines Pfads direkt angeben.

Korollar 2.4.18 (Explizite Darstellung der Vorfahren). *Seien \mathcal{T} ein Baum, $v \in \mathcal{T}$ und (v_0, \dots, v_ℓ) mit $\ell \in \mathbb{N}_0$ der eindeutige Pfad von $\text{root}(\mathcal{T})$ nach v , dann gilt*

$$\text{pred}(v) = \{v_i \mid i \in \{0, \dots, \ell\}\}.$$

Beweis. Wir zeigen die Gleichheit durch zwei Inklusionen.

„ \supseteq “ Für alle $i \in \{0, \dots, \ell\}$ ist (v_i, \dots, v_ℓ) nach Definition ein Pfad von v_i nach v und damit $v_i \in \text{pred}(v)$, also

$$\text{pred}(v) \supseteq \{v_i \mid i \in \{0, \dots, \ell\}\}.$$

„ \subseteq “ Sei $v^+ \in \text{pred}(v)$. Gilt $v^+ = \text{root}(\mathcal{T})$, dann folgt mit $v_0 = \text{root}(\mathcal{T}) = v^+$ insbesondere $v^+ \in \{v_i \mid i \in \{0, \dots, \ell\}\}$. Sei nun $v^+ \neq \text{root}(\mathcal{T})$, dann existiert ein Pfad $(r_0, \dots, r_{\tilde{\ell}})$ mit $\tilde{\ell} \in \mathbb{N}_0$ von $\text{root}(\mathcal{T})$ nach v^+ und es gilt $\tilde{\ell} > 0$ bzw. $\tilde{\ell} - 1 \geq 0$. Des Weiteren existiert mit $v^+ \in \text{pred}(v)$ ein Pfad $(v_0^+, \dots, v_{\ell^+}^+)$ mit $\ell^+ \in \mathbb{N}_0$ von v^+ nach v . Es gilt $v_0^+ = v^+ = r_{\tilde{\ell}-1}$, womit

$$(r_0, \dots, r_{\tilde{\ell}-1}, v_0^+, \dots, v_{\ell^+}^+)$$

einen Pfad von $\text{root}(\mathcal{T})$ nach v definiert. Da dieser eindeutig ist, gilt

$$(v_0, \dots, v_\ell) = (r_0, \dots, r_{\tilde{\ell}-1}, v_0^+, \dots, v_{\ell^+}^+).$$

Insbesondere existiert ein $i \in \{0, \dots, \ell\}$ mit $v_i = v_0^+ = v^+$ — es gilt $i = \tilde{\ell}$ — und damit

$$v^+ \in \{v_i \mid i \in \{0, \dots, \ell\}\}.$$

Es folgt

$$\text{pred}(v) \subseteq \{v_i \mid i \in \{0, \dots, \ell\}\}$$

und zusammen mit „ \supseteq “ die zu beweisende Aussage. \square

2 Grundlagen

Eine den später vielfach rekursiv ablaufenden Algorithmen angepasste Darstellung der Vor- und Nachfahren wird durch die beiden folgenden Lemmata beschrieben. Beide Aussagen dienen dazu, eine Umformung dieser Mengen unter Verwendung des Vaters bzw. der Söhne eines Elements im Baum bereitzustellen.

Lemma 2.4.19 (Rekursive Darstellung der Vorfahren). *Sei \mathcal{T} ein Baum, dann gilt für alle $v \in \mathcal{T}$*

$$\text{pred}(v) = \begin{cases} \{v\} & , \text{ falls } v = \text{root}(\mathcal{T}), \\ \{v\} \dot{\cup} \text{pred}(\text{father}(v)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Sei $v \in \mathcal{T}$ und (v_0, \dots, v_ℓ) mit $\ell \in \mathbb{N}_0$ der eindeutige Pfad von $\text{root}(\mathcal{T})$ nach v . Mit Korollar 2.4.18 folgt

$$\text{pred}(v) = \{v_i \mid i \in \{0, \dots, \ell\}\}.$$

Wir betrachten nun nacheinander die beiden Fälle für v .

Es gelte zuerst $v = \text{root}(\mathcal{T})$, dann folgt $\ell = 0$, da (v_0) der eindeutige Pfad von $\text{root}(\mathcal{T})$ nach $\text{root}(\mathcal{T})$ ist. Es gilt dann

$$\text{pred}(v) = \{v_0\} = \{\text{root}(\mathcal{T})\} = \{v\}$$

und somit die Aussage in diesem Fall.

Sei nun $v \neq \text{root}(\mathcal{T})$ vorausgesetzt, dann folgt $\ell > 0$ bzw. $\ell - 1 \geq 0$. Nach Definition eines Pfads gilt

$$v_{\ell-1} = \text{father}(v_\ell) = \text{father}(v).$$

Damit ist $(v_0, \dots, v_{\ell-1})$ ein Pfad von $\text{root}(\mathcal{T})$ nach $\text{father}(v)$ und somit eindeutig. Es gilt mit Korollar 2.4.18 also

$$\text{pred}(\text{father}(v)) = \{v_i \mid i \in \{0, \dots, \ell - 1\}\} \quad (2.12)$$

und mit $v_\ell = v$ folgt

$$\begin{aligned} \text{pred}(v) &= \{v_i \mid i \in \{0, \dots, \ell\}\} \\ &= \{v_\ell\} \cup \{v_i \mid i \in \{0, \dots, \ell - 1\}\} \\ &= \{v\} \cup \text{pred}(\text{father}(v)). \end{aligned}$$

Wir zeigen abschließend, dass diese Vereinigung disjunkt ist. Dazu nehmen wir an, dass $v \in \text{pred}(\text{father}(v))$ gilt. Nach Korollar 2.4.18 (vgl. auch (2.12)) existiert dann ein $i \in \{0, \dots, \ell - 1\}$ mit $v = v_i$. Es wären dann (v_0, \dots, v_ℓ) und (v_0, \dots, v_i) Pfade von $\text{root}(\mathcal{T})$ nach v . Mit $i \neq \ell$ können diese nicht gleich sein, was ein Widerspruch zur Eindeutigkeit von Pfaden in Bäumen ist. Die Annahme war also falsch, womit

$$\text{pred}(v) = \{v\} \dot{\cup} \text{pred}(\text{father}(v))$$

folgt. □

Lemma 2.4.20 (Rekursive Darstellung der Nachfahren). *Sei \mathcal{T} ein Baum, dann gilt für alle $v \in \mathcal{T}$*

$$\text{sons}^*(v) = \begin{cases} \{v\} & , \text{falls } \text{sons}(v) = \emptyset, \\ \{v\} \dot{\cup} \bigcup_{v^* \in \text{sons}(v)} \text{sons}^*(v^*) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Sei $v \in \mathcal{T}$. In Analogie zu dem Beweis von Lemma 2.4.19 betrachten wir die beiden Fälle für v nacheinander.

Es gelte zuerst $\text{sons}(v) = \emptyset$. Mit $v_0 := v$ ist (v_0) ein Pfad von v nach v , womit $\text{sons}^*(v) \supseteq \{v\}$ folgt. Sei nun $v^* \in \text{sons}^*(v)$, dann existiert ein Pfad (v_0, \dots, v_ℓ) mit $\ell \in \mathbb{N}_0$ von v nach v^* . Angenommen es gilt $\ell > 0$ bzw. $\ell \geq 1$, dann existiert das Element $v_1 \in \mathcal{T}$ und nach Definition eines Pfads gilt $v_1 \in \text{sons}(v_0) = \text{sons}(v) = \emptyset$. Dieser Widerspruch liefert $\ell = 0$ und damit $v = v_0 = v^*$, also $\text{sons}^*(v) \subseteq \{v\}$. Mit beiden Inklusionen folgt

$$\text{sons}^*(v) = \{v\}$$

und somit die Aussage in diesem Fall.

Sei nun $\text{sons}(v) \neq \emptyset$. Wir zeigen zuerst per Widerspruch, dass $v \notin \bigcup_{v^* \in \text{sons}(v)} \text{sons}^*(v^*)$ gilt. Angenommen es gilt $v \in \bigcup_{v^* \in \text{sons}(v)} \text{sons}^*(v^*)$, dann existiert ein $v^* \in \text{sons}(v)$ mit $v \in \text{sons}^*(v^*)$. Es folgt somit die Existenz eines Pfads (v_0^*, \dots, v_ℓ^*) mit $\ell \in \mathbb{N}_0$ von v^* nach v . Mit $v_0^* = v^* \in \text{sons}(v) \neq \emptyset$ ist dann

$$(v, v_0^*, \dots, v_\ell^*)$$

ein Pfad von v nach v der Länge $\ell + 1 > 0$. Da allerdings (v_0) mit $v_0 := v$ ein Pfad von v nach v der Länge Null ist, widerspricht die Annahme der Eindeutigkeit von Pfaden in Bäumen. Es folgt somit $v \notin \bigcup_{v^* \in \text{sons}(v)} \text{sons}^*(v^*)$.

Wir zeigen nun die Gleichheit beider Mengen der Aussage in diesem Fall ($\text{sons}(v) \neq \emptyset$) durch zwei Inklusionen.

„ \supseteq “ Sei $v^* \in \{v\} \dot{\cup} \bigcup_{\tilde{v}^* \in \text{sons}(v)} \text{sons}^*(\tilde{v}^*)$. Gilt $v^* \in \{v\}$, dann ist analog zu den vorherigen Betrachtungen (v_0) mit $v_0 := v$ ein Pfad von v nach v^* und damit $v^* \in \text{sons}^*(v)$.

Gilt nun $v^* \in \bigcup_{\tilde{v}^* \in \text{sons}(v)} \text{sons}^*(\tilde{v}^*)$, dann existiert ein $\tilde{v}^* \in \text{sons}(v)$ mit $v^* \in \text{sons}^*(\tilde{v}^*)$. Nach Definition existiert somit ein Pfad $(\tilde{v}_0^*, \dots, \tilde{v}_\ell^*)$ mit $\ell \in \mathbb{N}_0$ von \tilde{v}^* nach v^* . Mit $\tilde{v}^* \in \text{sons}(v) \neq \emptyset$ ist

$$(v, \tilde{v}_0^*, \dots, \tilde{v}_\ell^*)$$

ein Pfad von v nach v^* , also $v^* \in \text{sons}^*(v)$. Es folgt die zu beweisende Inklusion.

„ \subseteq “ Sei $v^* \in \text{sons}^*(v)$, dann existiert ein Pfad (v_0, \dots, v_ℓ) mit $\ell \in \mathbb{N}_0$ von v nach v^* . Gilt $\ell = 0$, dann folgt $v^* = v_\ell = v_0 = v$ und damit

$$v^* \in \{v\} \dot{\cup} \bigcup_{\tilde{v}^* \in \text{sons}(v)} \text{sons}^*(\tilde{v}^*).$$

Gilt nun $\ell > 0$ bzw. $\ell \geq 1$, dann folgt nach Definition eines Pfads $v_1 \in \text{sons}(v_0) = \text{sons}(v)$. Damit ist

$$(v_1, \dots, v_\ell)$$

2 Grundlagen

ein Pfad von v_1 nach v^* und somit $v^* \in \text{sons}^*(v_1)$. Mit $v_1 \in \text{sons}(v_0) = \text{sons}(v)$ folgt

$$v^* \in \bigcup_{\tilde{v}^* \in \text{sons}(v)} \text{sons}^*(\tilde{v}^*),$$

also auch die zu beweisende Inklusion. Zusammen mit „ \supseteq “ folgt die Aussage. \square

Korollar 2.4.21. *Seien \mathcal{T} ein Baum, $v \in \mathcal{T}$ und $v^* \in \text{sons}^*(v) \setminus \{v\}$, dann*

- (a) *existiert genau ein $\tilde{v} \in \text{sons}(v)$ mit $\tilde{v} \in \text{pred}(v^*)$ und*
- (b) *es gilt $\text{father}(v^*) \in \text{sons}^*(v)$.*

Beweis. Gilt $\text{sons}(v) = \emptyset$, dann folgt nach Lemma 2.4.20 $\text{sons}^*(v) = \{v\}$ und damit $\text{sons}^*(v) \setminus \{v\} = \emptyset$. In diesem Fall wäre nichts zu zeigen. Wir setzen deshalb $\text{sons}(v) \neq \emptyset$ voraus.

Sei $v^* \in \text{sons}^*(v) \setminus \{v\}$, dann existiert ein Pfad (v_0, \dots, v_ℓ) mit $\ell \in \mathbb{N}_0$ von v nach v^* . Da $v \neq v^*$ gilt, folgt $\ell > 0$ bzw. $\ell \geq 1$. Wir setzen $\tilde{v} := v_1$, dann gilt mit $v_0 = v$ nach Definition eines Pfads $\tilde{v} \in \text{sons}(v)$. Des Weiteren ist (v_1, \dots, v_ℓ) ein Pfad von \tilde{v} nach v^* , womit $\tilde{v} \in \text{pred}(v^*)$ folgt. Aufgrund der Eindeutigkeit des Pfads gilt die Aussage in (a).

Mit $\ell > 0$ gilt außerdem $\ell - 1 \geq 0$ sowie $v_\ell \neq \text{root}(\mathcal{T})$ und nach Definition eines Pfads $v_{\ell-1} = \text{father}(v_\ell) = \text{father}(v^*)$. Damit ist $(v_0, \dots, v_{\ell-1})$ ein Pfad von v nach $\text{father}(v^*)$. Also gilt $\text{father}(v^*) \in \text{sons}^*(v)$ und somit die Aussage in (b). \square

Level und Tiefe

Um eine Aussage darüber treffen zu können, wie „weit“ — in einem geeigneten Sinn — ein Element eines Baums von der Wurzel entfernt ist und wie groß diese „Entfernung“ maximal sein kann, führen wir die Begriffe des *Levels* und der *Tiefe* ein. Da auch der Level in späteren Betrachtungen rekursiver Algorithmen verwendet wird, beweisen wir im Anschluss an dessen Definition ebenfalls eine der Rekursion zugänglichere Darstellung.

Definition 2.4.22 (Level und Tiefe). *Sei \mathcal{T} ein Baum. Für alle $v \in \mathcal{T}$ nennen wir die Länge $\ell \in \mathbb{N}_0$ des eindeutigen Pfads (v_0, \dots, v_ℓ) von $\text{root}(\mathcal{T})$ nach v den Level von v und setzen*

$$\text{level}(v) := \ell.$$

Des Weiteren nennen wir

$$\text{depth}(\mathcal{T}) := \max\{\text{level}(v) \mid v \in \mathcal{T}\} \in \mathbb{N}_0$$

die Tiefe des Baums \mathcal{T} .

Lemma 2.4.23 (Rekursive Darstellung des Levels). *Sei \mathcal{T} ein Baum, dann gilt für alle $v \in \mathcal{T}$*

$$\text{level}(v) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } v = \text{root}(\mathcal{T}), \\ \text{level}(\text{father}(v)) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Sei $v \in \mathcal{T}$ und (v_0, \dots, v_ℓ) mit $\ell \in \mathbb{N}_0$ der eindeutige Pfad von $\text{root}(\mathcal{T})$ nach v , also $\text{level}(v) = \ell$. Gilt der erste Fall, also $v = \text{root}(\mathcal{T})$, dann folgt $\ell = 0$ und damit $\text{level}(v) = 0$.

Im zweiten Fall, also $v \neq \text{root}(\mathcal{T})$, folgt $\ell > 0$ und damit $\ell - 1 \geq 0$. Nach Definition eines Pfads folgt $v_{\ell-1} = \text{father}(v_\ell) = \text{father}(v)$. Damit ist $(v_0, \dots, v_{\ell-1})$ ein Pfad von $\text{root}(\mathcal{T})$ nach $v_{\ell-1}$, also insbesondere eindeutig. Es folgt $\text{level}(v_{\ell-1}) = \ell - 1$ und damit

$$\text{level}(v) = \ell = \ell - 1 + 1 = \text{level}(v_{\ell-1}) + 1 = \text{level}(\text{father}(v)) + 1,$$

also die Aussage. \square

Bemerkung 2.4.24 (Induktion). *Die rekursiven Darstellungen der Vor- und Nachfahren sowie des Levels (siehe Lemma 2.4.19, Lemma 2.4.20 und Lemma 2.4.23) eignen sich besonders für die später häufiger zur Anwendung kommende Beweistechnik der Induktion.*

Wird eine Aussage beispielsweise induktiv über die Anzahl der Vor- oder Nachfahren eines Knotens bewiesen, dann lässt sich im Induktionsschritt zu dem entsprechenden Vater bzw. zu einem Sohn übergehen. Aufgrund der disjunkten Vereinigung in Lemma 2.4.19 bzw. Lemma 2.4.20 wissen wir, dass dort die Mächtigkeit der jeweiligen Vor- bzw. Nachfahrenmenge mindestens um eins kleiner sein muss und können dann in der Regel die Induktionsvoraussetzung anwenden. Analog verhält es sich mit dem Level eines Knotens, indem wir zu dem Vater übergehen.

Da sich dieses Grundprinzip häufiger wiederholt, wird an den entsprechenden Stellen nicht immer wieder auf die benötigten Aussagen verwiesen, sondern es werden diese implizit — also ohne Angabe des konkreten Lemmas — verwendet.

Korollar 2.4.25 (Level in Pfaden). *Seien \mathcal{T} ein Baum, $v \in \mathcal{T}$ und $v^* \in \text{sons}^*(v)$ sowie (v_0, \dots, v_ℓ) mit $\ell \in \mathbb{N}_0$ der eindeutige Pfad von v nach v^* , dann gilt*

$$\text{level}(v_i) - \text{level}(v_0) = i \quad \text{für alle } i \in \{0, \dots, \ell\}.$$

Beweis. Für $i = 0$ gilt $\text{level}(v_i) = \text{level}(v_0)$ und damit

$$\text{level}(v_i) - \text{level}(v_0) = 0 = i.$$

Insbesondere folgt die Aussage also in dem Fall von $\ell = 0$. Aus diesem Grund sei $\ell > 0$ vorausgesetzt. Sei weiter (r_0, \dots, r_{ℓ_0}) mit $\ell_0 \in \mathbb{N}_0$ der eindeutige Pfad von $\text{root}(\mathcal{T})$ nach v_0 , dann gilt $\text{level}(v_0) = \ell_0$. Mit $\ell > 0$ folgt $\ell \geq 1$ und aufgrund von $r_{\ell_0} = v_0$ gilt

$$v_1 \in \text{sons}(v_0) = \text{sons}(r_{\ell_0}).$$

Sei $i \in \{1, \dots, \ell\}$, dann ist

$$(r_0, \dots, r_{\ell_0}, v_1, \dots, v_i)$$

ein Pfad von $\text{root}(\mathcal{T})$ nach v_i und somit eindeutig. Es gilt dann nach Definition $\text{level}(v_i) = \ell_0 + i$, also

$$\text{level}(v_i) - \text{level}(v_0) = \ell_0 + i - \ell_0 = i,$$

womit die Aussage folgt. \square

2 Grundlagen

Bemerkung 2.4.26. Seien \mathcal{T} ein Baum, $v \in \mathcal{T}$ und $v^* \in \text{sons}^*(v)$, dann ist nach Korollar 2.4.25 die Länge des Pfads von v nach v^* durch den Levelunterschied $\text{level}(v^*) - \text{level}(v) \in \mathbb{N}_0$ dieser beiden Knoten gegeben. Die Existenz eines solchen Pfads gilt mit der Definition der Nachfahren.

Korollar 2.4.27. Seien \mathcal{T} ein Baum und $v, w \in \mathcal{T}$ mit $\text{level}(v) \leq \text{level}(w)$, dann existiert ein $w^+ \in \text{pred}(w)$ mit $\text{level}(v) = \text{level}(w^+)$.

Beweis. Seien (v_0, \dots, v_{ℓ_v}) mit $\ell_v \in \mathbb{N}_0$ der eindeutige Pfad von $\text{root}(\mathcal{T})$ nach v und (w_0, \dots, w_{ℓ_w}) mit $\ell_w \in \mathbb{N}_0$ der eindeutige Pfad von $\text{root}(\mathcal{T})$ nach w . Es gilt dann

$$\text{level}(v) = \ell_v \quad \text{und} \quad \text{level}(w) = \ell_w.$$

Mit Korollar 2.4.18 gilt weiter

$$\text{pred}(w) = \{w_i \mid i \in \{0, \dots, \ell_w\}\} \quad (2.13)$$

und mit $\text{level}(w_0) = \text{level}(\text{root}(\mathcal{T})) = 0$ nach Korollar 2.4.25

$$\text{level}(w_i) = i \quad \text{für alle } i \in \{0, \dots, \ell_w\}. \quad (2.14)$$

Die Voraussetzung liefert $0 \leq \ell_v \leq \ell_w$. Aus (2.13) folgt

$$w_{\ell_v} \in \text{pred}(w)$$

und (2.14) liefert

$$\text{level}(v) = \ell_v = \text{level}(w_{\ell_v}).$$

Wir setzen $w^+ := w_{\ell_v}$, womit die Aussage folgt. □

Beschriftete Bäume

Als Erweiterung von Bäumen werden nachstehend *beschriftete Bäume* eingeführt, mit deren Hilfe sich im nächsten Abschnitt sowohl *Cluster-* als auch *Blockclusterbäume* als fundamentale Grundlage der \mathcal{H}^2 -Matrizen definieren lassen. Die *Beschriftung* ordnet dabei jedem Element eines Baums eine zusätzliche Eigenschaft zu, die es uns im weiteren Verlauf ermöglicht, Indexmengen hierarchisch zu partitionieren.

Definition 2.4.28 (Beschrifteter Baum). Ein Tupel $\mathcal{T} := (V, \text{sons}, \text{root}, h, H)$ nennen wir einen beschrifteten Baum, wenn H eine Menge,

$$h : V \rightarrow H, \quad v \mapsto \hat{v}$$

eine Abbildung und $(V, \text{sons}, \text{root})$ ein Baum im Sinne von Definition 2.4.1 ist.

Für alle $v \in V$ nennen wir $h(v) = \hat{v}$ die Beschriftung von v . Wenn aus der Bezeichnung \mathcal{T} klar hervorgeht, welches Tupel $(V, \text{sons}, \text{root}, h, H)$ zugrundeliegt, schreiben wir auch $v \in \mathcal{T}$ anstatt $v \in V$, identifizieren \mathcal{T} also mit V . Für die Wurzel root schreiben wir auch $\text{root}(\mathcal{T})$.

3 Hierarchische Matrizen

Dieses Kapitel widmet sich der Einführung von \mathcal{H}^2 -Matrizen, die die strukturelle Grundlage der vorliegenden Arbeit bilden. \mathcal{H}^2 -Matrizen basieren auf einer hierarchischen Zerlegung des kartesischen Produkts $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ zweier endlicher Indexmengen \mathcal{I} und \mathcal{J} , welches durch einen sogenannten *Blockclusterbaum* dargestellt wird. Vorbereitend für die Definition eines Blockclusterbaums für $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ werden die beiden Indexmengen \mathcal{I} und \mathcal{J} gesondert hierarchisch zerlegt, was durch einen *Clusterbaum* beschrieben wird. Die sowohl Cluster- als auch Blockclusterbäumen übergeordnete Struktur ist — wie mit der Namensgebung angedeutet — die eines Baums, genauer gesagt eines beschrifteten Baums (siehe Definition 2.4.28).

Die folgenden Definitionen und Notationen orientieren sich an [6, Chapter 3] (vgl. auch Abschnitt 2.4).

3.1 Clusterbäume

Definition 3.1.1 (Clusterbaum). *Sei \mathcal{I} eine endliche Indexmenge. Ein beschrifteter Baum $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ heißt Clusterbaum für \mathcal{I} , wenn*

- (i) *die Wurzel $r := \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ die Beschriftung $\hat{r} = \mathcal{I}$ hat und*
- (ii) *sich die Beschriftung jedes Knotens $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $\text{sons}(t) \neq \emptyset$ durch die disjunkte Vereinigung*

$$\hat{t} = \bigcup_{t^* \in \text{sons}(t)} \hat{t}^* \quad (3.1)$$

darstellen lässt.

Die Knoten des Baums $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ nennen wir Cluster und die Menge der Blätter definieren wir als

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}} := \{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \mid \text{sons}(t) = \emptyset\}.$$

Aus der Bezeichnung $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ geht bereits eindeutig hervor, dass dies ein Clusterbaum für die Indexmenge \mathcal{I} ist. Wir lassen aus diesem Grund den Zusatz „für \mathcal{I} “ im Folgenden auch einfach weg und setzen für einen Clusterbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ immer voraus, dass der Index \mathcal{I} eine zugrundeliegende endliche Indexmenge ist.

Clusterbäume sind nach Definition somit Bäume im Sinne der Definition 2.4.1. Es lassen sich also alle Definitionen und Aussagen des Abschnitts 2.4 von Bäumen auf Clusterbäume übertragen. Insbesondere sind damit die Vor- und Nachfahren, der Level, der Vater sowie die erweiterten Söhne für alle Cluster eines Clusterbaums — bei dem Vater für alle bis auf die Wurzel — übertragbar.

3 Hierarchische Matrizen

Bemerkung 3.1.2 (Verwendung von sons^+ in Clusterbäumen). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, dann gilt unter Verwendung der erweiterten Söhne sons^+ (siehe Definition 2.4.8) für (3.1) die triviale Verallgemeinerung*

$$\hat{t} = \bigcup_{t^* \in \text{sons}^+(t)} \hat{t}^* \quad \text{für alle } t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}. \quad (3.2)$$

Bemerkung 3.1.3 (Balanciertheit). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ zwei Clusterbäume. Falls für alle $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$ die Eigenschaft*

$$\text{level}(t) = \text{level}(s)$$

gilt, nennen wir die Clusterbäume $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ zueinander balanciert, ansonsten zueinander unbalanciert. Gilt $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} = \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$, so sagen wir einfach $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ist balanciert bzw. unbalanciert.

Mit der Bedingung (ii) aus Definition 3.1.1 ergibt sich die Aussage des nachstehenden Korollars über den Zusammenhang der Beschriftung eines Clusters mit den Beschriftungen von dessen Vorfahren. In dem darauf folgenden Lemma verwenden wir diese Eigenschaft, um zu zeigen, in welchem Zusammenhang Cluster stehen, dessen Beschriftungen einen nichtleeren Schnitt aufweisen.

Korollar 3.1.4 (Beschriftungen der Vorfahren). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum und $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, dann gilt $\hat{t} \subseteq \hat{t}^+$ für alle $t^+ \in \text{pred}(t)$.*

Beweis. Sei (t_0, \dots, t_n) mit $n \in \mathbb{N}_0$ der Pfad von $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})$ nach t in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, dann gilt nach Korollar 2.4.18

$$\text{pred}(t) = \{t_0, \dots, t_n\}.$$

Wir zeigen nun $\hat{t} \subseteq \hat{t}_\ell$ für alle $\ell \in \{0, \dots, n\}$ per Induktion, womit die Aussage folgt.

Für $\ell = n$ gilt $t = t_n = t_\ell$ und deswegen insbesondere $\hat{t} \subseteq \hat{t}_\ell$. Sei nun $\ell \in \{1, \dots, n\}$ so gegeben, dass $\hat{t} \subseteq \hat{t}_\ell$ gilt.

Nach Definition von Pfaden folgt dann $t_\ell \in \text{sons}(t_{\ell-1})$ und mit Bedingung (ii) aus Definition 3.1.1 auch

$$\hat{t}_{\ell-1} = \bigcup_{t^* \in \text{sons}(t_{\ell-1})} \hat{t}^*.$$

Dies bedeutet insbesondere $\hat{t}_\ell \subseteq \hat{t}_{\ell-1}$ und somit nach Induktionsvoraussetzung $\hat{t} \subseteq \hat{t}_\ell \subseteq \hat{t}_{\ell-1}$. \square

Lemma 3.1.5 (Schnitt von Beschriftungen). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum und $t, s \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $\hat{t} \cap \hat{s} \neq \emptyset$, dann folgt $t \in \text{pred}(s)$ oder $s \in \text{pred}(t)$.*

Beweis. Seien (t_0, \dots, t_{ℓ_t}) mit $\ell_t \in \mathbb{N}_0$ und (s_0, \dots, s_{ℓ_s}) mit $\ell_s \in \mathbb{N}_0$ die Pfade von $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})$ nach t bzw. s in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$. Es gilt $s_0 = \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}) = t_0$ und nach Korollar 2.4.18

$$\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}) \in \text{pred}(t) \cap \text{pred}(s) \stackrel{2.4.18}{=} \{t_0, \dots, t_{\ell_t}\} \cap \{s_0, \dots, s_{\ell_s}\},$$

also $\text{pred}(t) \cap \text{pred}(s) \neq \emptyset$. Da $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ endlich ist, ist auch $\text{pred}(t) \cap \text{pred}(s)$ als Teilmenge von $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ endlich. Damit existiert $r \in \text{pred}(t) \cap \text{pred}(s)$ mit

$$\ell := \text{level}(r) = \max\{\text{level}(\tilde{r}) \mid \tilde{r} \in \text{pred}(t) \cap \text{pred}(s)\}.$$

Da s_ℓ und t_ℓ die einzigen Vorfahren von s bzw. t sind, für die $\text{level}(t_\ell) = \ell = \text{level}(s_\ell)$ gilt (vgl. Korollar 2.4.25), folgt $t_\ell = r = s_\ell$. Insbesondere bedeutet dies $\ell \leq \ell_t$ und $\ell \leq \ell_s$. Angenommen es gilt $\ell < \ell_t$ und $\ell < \ell_s$, dann liefert die Definition von Pfaden in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$

$$t_{\ell+1}, s_{\ell+1} \in \text{sons}(r). \quad (3.3)$$

Nach Wahl von r folgt $t_{\ell+1} \neq s_{\ell+1}$ und durch $t_{\ell+1} \in \text{pred}(t)$ sowie $s_{\ell+1} \in \text{pred}(s)$ gilt mit Korollar 3.1.4

$$(\hat{t}_{\ell+1} \cap \hat{s}_{\ell+1}) \supseteq (\hat{t} \cap \hat{s}) \neq \emptyset. \quad (3.4)$$

Hieraus ergibt sich mit der Disjunktheit der Vereinigung

$$\hat{r} = \dot{\bigcup}_{r^* \in \text{sons}(r)} \hat{r}^*$$

(vgl. Definition 3.1.1) unter Verwendung von (3.3) und (3.4) ein Widerspruch.

Es gilt also $\ell = \ell_t$ oder $\ell = \ell_s$. Im ersten Fall bedeutet dies

$$t = t_{\ell_t} = t_\ell = r \in (\text{pred}(t) \cap \text{pred}(s)) \subseteq \text{pred}(s)$$

und im zweiten Fall analog $s \in \text{pred}(t)$. □

Durch die Menge der Blätter eines Clusterbaums wird die zugrundeliegende Indexmenge partitioniert — siehe nachstehendes Korollar —, und wie sich die Anzahl aller Cluster eines Clusterbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ zu der Mächtigkeit der Indexmenge \mathcal{I} verhält, zeigt das auf dieses Korollar folgende Lemma.

Korollar 3.1.6 (Blattpartition). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum. Die Beschriftungen der Blätter $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ bilden eine disjunkte Partition der Indexmenge \mathcal{I} , es gilt also*

$$\mathcal{I} = \dot{\bigcup}_{t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}} \hat{t}.$$

Beweis. Siehe [6, Corollary 3.9]. □

Lemma 3.1.7 (Mächtigkeit). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum und es gelte $\#\text{sons}(t) \neq 1$ für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, dann gilt*

$$\#\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \leq 2\#\mathcal{I}.$$

Beweis. Siehe [27, Lemma 2.2] oder [6, Lemma 3.52]. □

3.2 Blockbäume

Wie eingangs dieses Kapitels erwähnt, ist das Ziel, eine Partitionierung des kartesischen Produkts $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ zweier endlicher Indexmengen \mathcal{I} und \mathcal{J} zu konstruieren. Nach Korollar 3.1.6 lassen sich \mathcal{I} und \mathcal{J} durch Clusterbäume disjunkt zerlegen. Basierend auf diesen Zerlegungen definieren wir einen *Blockclusterbaum*, dessen Blätter — wie sich beweisen lässt (siehe Lemma 3.2.2 und Korollar 3.2.5) — die gewünschte Partitionierung beschreiben.

Definition 3.2.1 (Blockclusterbaum). *Einen beschrifteten Baum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ basierend auf zwei Clusterbäumen $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ nennen wir einen Blockclusterbaum (kurz: Blockbaum) für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$, wenn*

- (i) *für jedes $b \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ Cluster $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ (Zeilencluster) und $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ (Spaltencluster) mit $b = (t, s)$ existieren und dessen Beschriftung durch $\hat{b} = \hat{t} \times \hat{s}$ gegeben ist,*
- (ii) *die Wurzel $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ durch $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}) = (\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}), \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}}))$ definiert ist und*
- (iii) *für jedes $b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $\text{sons}(b) \neq \emptyset$ die Söhne durch*

$$\text{sons}(b) = \begin{cases} \text{sons}(t) \times \{s\} & , \text{ falls } \text{sons}(t) \neq \emptyset \text{ und } \text{sons}(s) = \emptyset, \\ \{t\} \times \text{sons}(s) & , \text{ falls } \text{sons}(t) = \emptyset \text{ und } \text{sons}(s) \neq \emptyset, \\ \text{sons}(t) \times \text{sons}(s) & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.5)$$

gegeben sind.

Die Knoten von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ nennen wir Blöcke und die Menge aller Blätter bezeichnen wir mit

$$\mathcal{L}_{\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} := \{b \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \mid \text{sons}(b) = \emptyset\}.$$

Die Namensgebung *Blockclusterbaum* wird durch das folgende Lemma gerechtfertigt. Auf Basis der dortigen Aussage führen wir direkt im Anschluss eine vereinfachende Bezeichnung ein.

Lemma 3.2.2 (Clusterbaum). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ zwei Clusterbäume, dann ist ein Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ ein Clusterbaum für $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ im Sinne von Definition 3.1.1.*

Beweis. Siehe [6, Lemma 3.14]. □

Bemerkung 3.2.3 (Verwendung von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ zwei Clusterbäume sowie $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$. Nach Lemma 3.2.2 ist $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Clusterbaum für $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$. Aus diesem Grund verwenden wir für $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ im Folgenden auch die Bezeichnung $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und für dessen Blätter $\mathcal{L}_{\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ schreiben wir auch $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.*

Des Weiteren setzen wir durch die bloße Verwendung von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ voraus, dass diesem Blockbaum zwei Clusterbäume $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ zugrundeliegen. Insbesondere lassen wir die Ergänzung „für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ “ auch einfach weg, wenn die spezielle Wahl der Clusterbäume für die aktuelle Betrachtung unerheblich — also beliebig — ist.

Blockbäume sind nach Definition 3.2.1 Bäume im Sinne der Definition 2.4.1. Wie auch schon im vorherigen Abschnitt über Clusterbäume erwähnt, lassen sich damit die Definitionen und Aussagen des Abschnitts 2.4 auf Blockbäume übertragen. Damit sind dann auch insbesondere die Vor- und Nachfahren, der Level, der Vater sowie die erweiterten Söhne für alle Blöcke eines Blockbaums — bei dem Vater für alle bis auf die Wurzel — definiert.

Bemerkung 3.2.4 (Verwendung von sons^+ in Blockbäumen). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum. Die Söhne eines Blocks werden mit Gleichung (3.5) durch die Söhne des Zeilen- und Spaltenclusters beschrieben, falls diese selbst noch Söhne haben. Ist dies nicht der Fall, wird einer der beiden Cluster festgehalten und mit den Söhnen des jeweils anderen kombiniert. Diese drei verschiedenen Fälle lassen sich etwas eleganter schreiben, wenn wir die erweiterten Söhne eines Clusters aus Definition 2.4.8 verwenden. Es gilt dann*

$$\text{sons}(b) = \text{sons}^+(t) \times \text{sons}^+(s)$$

für alle $b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $\text{sons}(b) \neq \emptyset$.

Hierbei sei angemerkt, dass für alle $b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ im Fall von $\text{sons}(t) = \emptyset = \text{sons}(s)$ insbesondere $\text{sons}(b) = \emptyset$ aufgrund der Baumeigenschaft von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ folgt.

Korollar 3.2.5 (Blattpartition). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, dann bilden die Beschriftungen der Blätter $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ eine disjunkte Partition der Indexmenge $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$, es gilt also*

$$\mathcal{I} \times \mathcal{J} = \bigcup_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \hat{b}.$$

Beweis. (Vgl. [6, Corollary 3.15]) Nach Lemma 3.2.2 ist $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Clusterbaum für die Indexmenge $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ und nach Lemma 3.1.6 bilden die Blätter eines Clusterbaums eine disjunkte Partition der Indexmenge. \square

Speziell für den Level und den Vater von Blöcken eines Blockbaums gelten die nun folgenden Aussagen.

Lemma 3.2.6 (Level von Blöcken). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum. Für alle $b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gilt*

$$(a) \text{ level}(b) = \max\{\text{level}(t), \text{level}(s)\},$$

$$(b) \text{ level}(t) < \text{level}(s) \Rightarrow t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \text{ und}$$

$$(c) \text{ level}(t) > \text{level}(s) \Rightarrow s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}}.$$

Beweis. Sei $b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Da $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Baum ist, existiert ein eindeutiger Pfad $(b_0 = (t_0, s_0), \dots, b_\ell = (t_\ell, s_\ell))$ mit $\ell \in \mathbb{N}_0$ von $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}})$ nach b . Durch die Konstruktion der Söhne gilt

$$b_i = (t_i, s_i) \in \text{sons}(b_{i-1}) = \text{sons}^+(t_{i-1}) \times \text{sons}^+(s_{i-1})$$

3 Hierarchische Matrizen

für alle $i \in \{1, \dots, \ell\}$. Damit sind (t_0, \dots, t_ℓ) und (s_0, \dots, s_ℓ) erweiterte Pfade (vgl. Definition 2.4.9) von $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})$ nach t bzw. $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}})$ nach s . Mit Lemma 2.4.13 existieren $\ell_{\mathcal{I}}, \ell_{\mathcal{J}} \in \mathbb{N}_{\leq \ell}$ so, dass $(t_0, \dots, t_{\ell_{\mathcal{I}}})$ und $(s_0, \dots, s_{\ell_{\mathcal{J}}})$ Pfade von $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})$ nach t bzw. $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}})$ nach s sind. Es gilt also

$$\text{level}(t) = \ell_{\mathcal{I}} \quad \text{und} \quad \text{level}(s) = \ell_{\mathcal{J}}.$$

(a) Angenommen es gilt $\ell_{\mathcal{I}} < \ell$ und $\ell_{\mathcal{J}} < \ell$, dann folgt $\ell_{\mathcal{I}} \leq \ell - 1$ und $\ell_{\mathcal{J}} \leq \ell - 1$. Nach Lemma 2.4.13 bedeutet dies $\text{sons}(t_{\ell_{\mathcal{I}}}) = \emptyset = \text{sons}(s_{\ell_{\mathcal{J}}})$. Lemma 2.4.11 liefert dann

$$t_{\ell-1} = t_{\ell_{\mathcal{I}}} = t_{\ell} \quad \text{und} \quad s_{\ell-1} = s_{\ell_{\mathcal{J}}} = s_{\ell},$$

also $b_{\ell-1} = (t_{\ell-1}, s_{\ell-1}) = (t_{\ell}, s_{\ell}) = b_{\ell}$. Damit folgt

$$b_{\ell} \in \text{sons}(b_{\ell-1}) = \text{sons}(b_{\ell}),$$

was ein Widerspruch zu der Baumeigenschaft von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ist (vgl. auch Bemerkung 2.4.4). Die Annahme war also falsch und es gilt $\ell_{\mathcal{I}} = \ell$ oder $\ell_{\mathcal{J}} = \ell$, was mit $\ell_{\mathcal{I}} \leq \ell$ und $\ell_{\mathcal{J}} \leq \ell$

$$\text{level}(b) = \ell = \max\{\ell_{\mathcal{I}}, \ell_{\mathcal{J}}\} = \max\{\text{level}(t), \text{level}(s)\}$$

bedeutet.

(b) Gilt $\text{level}(t) < \text{level}(s)$, dann folgt $\ell_{\mathcal{I}} < \ell_{\mathcal{J}} \leq \ell$. Mit Lemma 2.4.13 bedeutet dies $\text{sons}(t_{\ell_{\mathcal{I}}}) = \emptyset$, also $t = t_{\ell_{\mathcal{I}}} \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$.

(c) Für $\text{level}(t) > \text{level}(s)$ folgt analog $\ell_{\mathcal{J}} < \ell_{\mathcal{I}} \leq \ell$ und damit $\text{sons}(s_{\ell_{\mathcal{J}}}) = \emptyset$, also $s = s_{\ell_{\mathcal{J}}} \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$. \square

Korollar 3.2.7 (Blattcluster). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum. Für alle $b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gilt*

(a) $\text{level}(t) < \text{level}(b) \Rightarrow t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und

(b) $\text{level}(s) < \text{level}(b) \Rightarrow s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$.

Beweis. Sei $b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und es gelte $\text{level}(t) < \text{level}(b)$, dann folgt mit Lemma 3.2.6 (a) $\text{level}(b) = \text{level}(s)$ und damit $\text{level}(t) < \text{level}(s)$. Lemma 3.2.6 (b) liefert dann $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, also die Aussage in (a). Die Aussage in (b) folgt analog mit Lemma 3.2.6 (c). \square

Lemma 3.2.8 (Rekursive Darstellung des Vaters). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum. Für alle $b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \{\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}})\}$ gilt*

$$\text{father}(b) = \begin{cases} (\text{father}(t), s) & , \text{falls } \text{level}(t) > \text{level}(s), \\ (t, \text{father}(s)) & , \text{falls } \text{level}(t) < \text{level}(s), \\ (\text{father}(t), \text{father}(s)) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.6)$$

Beweis. Sei $b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \{\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}})\}$ und $b^+ = (t^+, s^+) := \text{father}(b)$, dann gilt $b \in \text{sons}(b^+) \neq \emptyset$, also

$$b = (t, s) \in \begin{cases} \text{sons}(t^+) \times \{s^+\} & , \text{ falls } \text{sons}(t^+) \neq \emptyset \text{ und } \text{sons}(s^+) = \emptyset, \\ \{t^+\} \times \text{sons}(s^+) & , \text{ falls } \text{sons}(t^+) = \emptyset \text{ und } \text{sons}(s^+) \neq \emptyset, \\ \text{sons}(t^+) \times \text{sons}(s^+) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Wir betrachten nun die drei Fälle aus (3.7) nacheinander.

Es gelte zuerst $\text{sons}(t^+) \neq \emptyset$ und $\text{sons}(s^+) = \emptyset$, dann folgt

$$b = (t, s) \in \text{sons}(b^+) = \text{sons}(t^+) \times \{s^+\}.$$

Es gilt also

$$\text{father}(b) = b^+ = (t^+, s^+) = (\text{father}(t), s)$$

und mit $t^+ \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ nach Kontraposition von Lemma 3.2.6 (b) $\text{level}(t^+) \geq \text{level}(s^+)$. Mit $t^+ = \text{father}(t)$ folgt $\text{level}(t) = \text{level}(t^+) + 1 > \text{level}(t^+)$ und $s = s^+$ liefert

$$\text{level}(t) > \text{level}(t^+) \geq \text{level}(s^+) = \text{level}(s).$$

Es gelte nun $\text{sons}(t^+) = \emptyset$ und $\text{sons}(s^+) \neq \emptyset$, dann folgt

$$b = (t, s) \in \text{sons}(b^+) = \{t^+\} \times \text{sons}(s^+).$$

Es gilt also

$$\text{father}(b) = b^+ = (t^+, s^+) = (t, \text{father}(s))$$

und mit $s^+ \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$ nach Kontraposition von Lemma 3.2.6 (c) $\text{level}(t^+) \leq \text{level}(s^+)$. Mit $s^+ = \text{father}(s)$ folgt $\text{level}(s) = \text{level}(s^+) + 1 > \text{level}(s^+)$ und $t = t^+$ liefert

$$\text{level}(t) = \text{level}(t^+) \leq \text{level}(s^+) < \text{level}(s).$$

Wir betrachten abschließend den dritten Fall in (3.7). Mit $\text{sons}(b^+) \neq \emptyset$ bedeutet dies $\text{sons}(t^+) \neq \emptyset \neq \text{sons}(s^+)$. Es folgt also

$$b = (t, s) \in \text{sons}(b^+) = \text{sons}(t^+) \times \text{sons}(s^+)$$

und damit

$$\text{father}(b) = b^+ = (t^+, s^+) = (\text{father}(t), \text{father}(s)).$$

Mit $t^+ \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $s^+ \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$ liefert die Kontraposition von Lemma 3.2.6 (b) und (c) $\text{level}(t^+) = \text{level}(s^+)$. Es folgt dann mit $t^+ = \text{father}(t)$ sowie $s^+ = \text{father}(s)$

$$\text{level}(t) = \text{level}(t^+) + 1 = \text{level}(s^+) + 1 = \text{level}(s).$$

Gilt nun $\text{level}(t) > \text{level}(s)$, dann kann nur $\text{sons}(t^+) \neq \emptyset$ und $\text{sons}(s^+) = \emptyset$ gelten, da in den beiden anderen Fällen $\text{level}(t) < \text{level}(s)$ bzw. $\text{level}(t) = \text{level}(s)$ folgt (s.o.). Analog folgt $\text{sons}(t^+) = \emptyset$ und $\text{sons}(s^+) \neq \emptyset$ aus $\text{level}(t) < \text{level}(s)$ sowie $\text{sons}(t^+) \neq \emptyset \neq \text{sons}(s^+)$ aus $\text{level}(t) = \text{level}(s)$. \square

3 Hierarchische Matrizen

Die folgende Aussage stellt einen Zusammenhang zwischen Vor- bzw. Nachfahren von Blöcken und den Vor- bzw. Nachfahren der diese Blöcke definierenden Cluster her.

Lemma 3.2.9 (Vor- und Nachfahren). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum und $b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, dann gilt*

- (a) $t^* \in \text{sons}^*(t)$ und $s^* \in \text{sons}^*(s)$ für alle $b^* = (t^*, s^*) \in \text{sons}^*(b)$ sowie
- (b) $t^+ \in \text{pred}(t)$ und $s^+ \in \text{pred}(s)$ für alle $b^+ = (t^+, s^+) \in \text{pred}(b)$.

Beweis. (a) Sei $b^* = (t^*, s^*) \in \text{sons}^*(b)$, dann existiert nach Definition der Nachfahren ein Pfad $(b_0 = (t_0, s_0), \dots, b_\ell = (t_\ell, s_\ell))$ mit $\ell \in \mathbb{N}_0$ von b nach b^* . Durch die Konstruktion der Söhne gilt

$$b_i = (t_i, s_i) \in \text{sons}(b_{i-1}) = \text{sons}^+(t_{i-1}) \times \text{sons}^+(s_{i-1})$$

für alle $i \in \{1, \dots, \ell\}$. Damit sind (t_0, \dots, t_ℓ) und (s_0, \dots, s_ℓ) erweiterte Pfade von t nach t^* bzw. s nach s^* . Mit Lemma 2.4.13 existieren $\ell_{\mathcal{I}}, \ell_{\mathcal{J}} \in \mathbb{N}_{\leq \ell}$ so, dass $(t_0, \dots, t_{\ell_{\mathcal{I}}})$ und $(s_0, \dots, s_{\ell_{\mathcal{J}}})$ Pfade von t nach t^* bzw. s nach s^* sind. Durch die Definition der Nachfahren folgt dann

$$t^* \in \text{sons}^*(t) \quad \text{und} \quad s^* \in \text{sons}^*(s),$$

also die Aussage.

(b) Sei $b^+ = (t^+, s^+) \in \text{pred}(b)$, dann gilt nach Korollar 2.4.17 (a) $b = (t, s) \in \text{sons}^*(b^+)$, womit nach Teil (a) dieses Lemmas

$$t \in \text{sons}^*(t^+) \quad \text{und} \quad s \in \text{sons}^*(s^+)$$

folgt. Mit Korollar 2.4.17 (b) bedeutet dies

$$t^+ \in \text{pred}(t) \quad \text{und} \quad s^+ \in \text{pred}(s).$$

Es folgt die Aussage. □

Zulässige Blockbäume

Die Struktur von \mathcal{H}^2 -Matrizen basiert auf der Menge $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ der Blätter eines Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, welche dank Lemma 3.2.5 eine Partition der Indexmenge $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ bilden. Lokal für jedes Blatt besteht eine \mathcal{H}^2 -Matrix dann entweder aus einer Matrix mit einer speziellen Niedrigrangdarstellung oder aus einer vollbesetzten Matrix (siehe Abschnitt 3.3). Welche Blöcke $(t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ durch niedrigen Rang dargestellt werden können, wird durch eine *Zulässigkeitsbedingung* beschrieben.

Definition 3.2.10 (Zulässigkeitsbedingung). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ zwei Clusterbäume. Eine Zulässigkeitsbedingung Adm ist eine Abbildung*

$$\text{Adm} : \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \rightarrow \{\text{wahr, falsch}\}.$$

Für ein Tupel $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ sagen wir auch

$$(t, s) \text{ ist zulässig} \quad \text{genau dann, wenn} \quad \text{Adm}((t, s)) = \text{wahr}$$

und

$$(t, s) \text{ ist unzulässig} \quad \text{genau dann, wenn} \quad \text{Adm}((t, s)) = \text{falsch}.$$

Die Zulässigkeitsbedingung dient nun dazu, zu entscheiden, welche Elemente der Blattmenge eines Blockbaums für eine Approximation in Frage kommen und welche nicht. Dies führt auf die folgende Definition eines *zulässigen Blockbaums*.

Definition 3.2.11 (Zulässiger Blockbaum). Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum und Adm eine Zulässigkeitsbedingung, dann heißt $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ zulässiger Blockbaum bezüglich Adm , wenn für alle $(t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$

$$\text{Adm}((t, s)) = \text{wahr} \quad \text{oder} \quad \text{sons}(t) = \emptyset = \text{sons}(s) \quad (3.8)$$

gilt. Wir unterscheiden dann zwischen zulässigen Blättern

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+ := \{(t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \mid \text{Adm}((t, s)) = \text{wahr}\}$$

und unzulässigen Blättern

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^- := \{(t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \mid \text{Adm}((t, s)) = \text{falsch}\}.$$

Liegt keine Mehrdeutigkeit im Bezug auf die verwendete Zulässigkeitsbedingung vor oder ist diese für die aktuelle Betrachtung unerheblich, lassen wir den Zusatz „bezüglich Adm “ auch einfach weg. Da im weiteren Verlauf dieser Arbeit nur zulässige Blockbäume betrachtet werden, sei für jeden auftretenden Blockbaum angenommen, dass dieser zulässig bzgl. einer — falls nicht anders angegeben — implizit gegebenen Zulässigkeitsbedingung sei.

Aufgrund der Definition der zulässigen und unzulässigen Blätter eines zulässigen Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gilt

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} = \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+ \dot{\cup} \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^-.$$

Abbildung 3.1 verdeutlicht den Zusammenhang eines zulässigen Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit zwei Clusterbäumen $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ über eine Zulässigkeitsbedingung Adm .

Bemerkung 3.2.12 (Minimal zulässiger Blockbaum). In der Definition 3.2.11 ist nicht ausgeschlossen, dass zulässige Blöcke noch weiter unterteilt sind — also noch Söhne besitzen —, da dort nur eine Bedingung an die Menge der Blätter gestellt wird. Wie diese Menge konkret aussieht, ist unerheblich. Aus diesem Grund nennen wir einen zulässigen Blockbaum *minimal*, wenn so eine Situation im Blockbaum nicht auftritt. Ein Block ist also genau dann ein Blatt, wenn dieser die Bedingung (3.8) erfüllt. Algorithmus 3.2.1 erzeugt einen minimal zulässigen Blockbaum.

Ist im Folgenden von einem zulässigen Blockbaum die Rede, so meint dies immer einen minimal zulässigen Blockbaum, es sei denn, es wird explizit darauf hingewiesen, dass dem nicht so ist.

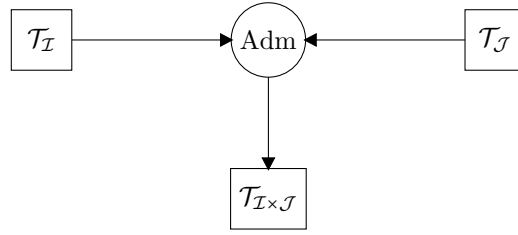


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung der Konstruktion eines zulässigen Blockbaums $\mathcal{T}_{I \times J}$ unter Verwendung zweier Clusterbäume \mathcal{T}_I und \mathcal{T}_J sowie einer Zulässigkeitsbedingung Adm .

Transponierte Blockbäume

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden immer wieder Aussagen für den Zeilen- oder Spaltenclusterbaum eines Blockbaums zu beweisen sein, die auch für den jeweils anderen gelten. Wir werden aus diesem Grund *transponierte Blockbäume* einführen, mit denen sich solche Aussagen von Zeilen- auf Spaltenclusterbäume — bzw. andersherum — übertragen lassen. Transponierte Blockbäume dienen somit überwiegend der Vermeidung von zusätzlichen Beweisen, bei denen sich die Rollen der entsprechenden Clusterbäume lediglich vertauschen. Dies ist möglich, sobald Aussagen für allgemeine Blockbäume zu zeigen sind.

Definition 3.2.13 (Transponierter Blockbaum). *Seien \mathcal{T}_I und \mathcal{T}_J Clusterbäume sowie Adm und $\widetilde{\text{Adm}}$ zwei Zulässigkeitsbedingungen. Seien weiter $\mathcal{T}_{I \times J}$ ein bzgl. Adm zulässiger Blockbaum für \mathcal{T}_I und \mathcal{T}_J sowie $\widetilde{\mathcal{T}}_{I \times J}$ ein bzgl. $\widetilde{\text{Adm}}$ zulässiger Blockbaum für \mathcal{T}_J und \mathcal{T}_I . Gilt*

- (i) $(t, s) \in \mathcal{T}_{I \times J}$ genau dann, wenn $(s, t) \in \widetilde{\mathcal{T}}_{I \times J}$ und
- (ii) $(t, s) \in \mathcal{L}_{I \times J}^+$ genau dann, wenn $(s, t) \in \widetilde{\mathcal{L}}_{I \times J}^+$,

dann nennen wir $\widetilde{\mathcal{T}}_{I \times J}$ einen zu $\mathcal{T}_{I \times J}$ transponierten Blockbaum bzw. sagen, dass $\widetilde{\mathcal{T}}_{I \times J}$ zu $\mathcal{T}_{I \times J}$ transponiert ist.

Wir werden nun zeigen, dass für jeden Blockbaum ein transponierter Blockbaum existiert und dieser eindeutig ist.

Lemma 3.2.14 (Existenz). *Seien \mathcal{T}_I und \mathcal{T}_J Clusterbäume, Adm eine Zulässigkeitsbedingung und $\mathcal{T}_{I \times J}$ ein bzgl. Adm zulässiger Blockbaum für \mathcal{T}_I und \mathcal{T}_J .*

Wir definieren die Abbildung

$$\widetilde{\text{Adm}} : \mathcal{T}_J \times \mathcal{T}_I \rightarrow \{\text{wahr, falsch}\}, \quad (s, t) \mapsto \text{Adm}((t, s))$$

sowie die Menge

$$\widetilde{\mathcal{T}}_{I \times J} := \{(s, t) \mid (t, s) \in \mathcal{T}_{I \times J}\}.$$

Algorithmus 3.2.1 Aufstellen eines minimal zulässigen Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.

```

procedure BLOCKCLUSTER( $b$ )
   $(t, s) \leftarrow b$ 
  if  $(t, s)$  zulässig then
     $\text{sons}(b) \leftarrow \emptyset$ 
  else
    if  $\text{sons}(t) = \emptyset$  then
       $\text{sons}(b) \leftarrow \{t\} \times \text{sons}(s)$ 
    else if  $\text{sons}(s) = \emptyset$  then
       $\text{sons}(b) \leftarrow \text{sons}(t) \times \{s\}$ 
    else
       $\text{sons}(b) \leftarrow \text{sons}(t) \times \text{sons}(s)$ 
    end if
  end if
  for all  $b^* \in \text{sons}(b)$  do
    BLOCKCLUSTER( $b^*$ )
  end for
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Der initiale Aufruf geschieht mit der Wurzel des Blockbaums, also mit $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}) = (\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}), \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}}))$. Ein Block $b = (t, s)$ wird so lange unterteilt, bis dieser entweder zulässig ist oder Zeilen- und Spaltencluster keine Söhne mehr besitzen. Falls ein Block unzulässig ist, werden die Söhne gemäß der Vorschrift (3.5) aus Definition 3.2.1 konstruiert und die Prozedur danach mit diesen wieder rekursiv aufgerufen.

Weiter setzen wir für alle $b = (s, t) \in \widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$

$$\widetilde{\text{sons}}((s, t)) := \{(s^*, t^*) \mid (t^*, s^*) \in \text{sons}((t, s))\} \quad \text{und} \quad \hat{b} := \hat{s} \times \hat{t},$$

dann ist $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein bzgl. $\widetilde{\text{Adm}}$ zulässiger Blockbaum für $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ sowie zu $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ transponiert.

Beweis. Wir zeigen als erstes, dass $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein beschrifteter Baum ist.

Für alle $(s, t) \in \widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gilt nach Definition $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, womit für alle $(t^*, s^*) \in \text{sons}((t, s))$ auch $(t^*, s^*) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und damit $(s^*, t^*) \in \widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ folgt. Die elementweise definierte Abbildung $\widetilde{\text{sons}}$ bildet also Elemente aus $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ in dessen Potenzmenge ab und erfüllt somit die Bedingung aus Definition 2.4.1 eines Baums.

Mit $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}) = (\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}), \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}})) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gilt $(\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}}), \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})) \in \widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Wir zeigen nun, dass für alle Elemente $(s, t) \in \widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein eindeutiger Pfad von dem Tupel $(\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}}), \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}))$ nach (s, t) in $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ existiert. Sei dazu $(s, t) \in \widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, dann gilt $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und da $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Baum ist, existiert ein eindeutiger Pfad $((t_0, s_0), \dots, (t_\ell, s_\ell))$ mit

3 Hierarchische Matrizen

$\ell \in \mathbb{N}_0$ von $(\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}), \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}}))$ nach (t, s) . Es gilt also

$$\begin{aligned} (t_0, s_0) &= (\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}), \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}})), \\ (t_i, s_i) &\in \text{sons}((t_{i-1}, s_{i-1})) \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, \ell\} \\ \text{und } (t_\ell, s_\ell) &= (t, s). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} (s_0, t_0) &= (\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}}), \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})), \\ (s_i, t_i) &\in \widetilde{\text{sons}}((s_{i-1}, t_{i-1})) \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, \ell\} \\ \text{und } (s_\ell, t_\ell) &= (s, t). \end{aligned}$$

Also ist $((s_0, t_0), \dots, (s_\ell, t_\ell))$ ein Pfad von $(\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}}), \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}))$ nach (s, t) in $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und mit der Eindeutigkeit des Pfads $((t_0, s_0), \dots, (t_\ell, s_\ell))$ folgt auch die Eindeutigkeit von $((s_0, t_0), \dots, (s_\ell, t_\ell))$. $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ist somit ein Baum mit Wurzel

$$\text{root}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}) = (\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}}), \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})).$$

Durch die Definition $\hat{b} = \hat{s} \times \hat{t}$ für alle $b = (s, t) \in \widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ist $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ auch ein beschrifteter Baum.

Wir zeigen nun, dass $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum ist. Hierzu müssen wir nur noch nachweisen, dass sich die Söhne in der durch Definition 3.2.1 geforderten Weise darstellen lassen.

Für alle $(s, t) \in \widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $\widetilde{\text{sons}}((s, t)) \neq \emptyset$ folgt $\text{sons}((t, s)) \neq \emptyset$. Seien $(s, t) \in \widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $(s^*, t^*) \in \widetilde{\text{sons}}((s, t))$, dann gilt $(t^*, s^*) \in \text{sons}((t, s))$. Da $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum ist, folgt

$$(t^*, s^*) \in \begin{cases} \text{sons}(t) \times \{s\} & , \text{ falls } \text{sons}(t) \neq \emptyset \text{ und } \text{sons}(s) = \emptyset, \\ \{t\} \times \text{sons}(s) & , \text{ falls } \text{sons}(t) = \emptyset \text{ und } \text{sons}(s) \neq \emptyset, \\ \text{sons}(t) \times \text{sons}(s) & \text{sonst} \end{cases}$$

und damit

$$(s^*, t^*) \in \begin{cases} \{s\} \times \text{sons}(t) & , \text{ falls } \text{sons}(s) = \emptyset \text{ und } \text{sons}(t) \neq \emptyset, \\ \text{sons}(s) \times \{t\} & , \text{ falls } \text{sons}(s) \neq \emptyset \text{ und } \text{sons}(t) = \emptyset, \\ \text{sons}(s) \times \text{sons}(t) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies entspricht der geforderten Darstellung der Söhne, womit $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum ist.

Abschließend zeigen wir, dass $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ zu $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ transponiert ist. Hierbei folgt die Bedingung (i) der Definition 3.2.13 direkt aus der Definition der Knotenmenge in $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Sei $(t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$, dann gilt $\text{sons}((t, s)) = \emptyset$ und nach Definition auch $\widetilde{\text{sons}}((s, t)) = \emptyset$. Der Block (s, t) ist also ein Blatt in $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Zusätzlich gilt

$$\widetilde{\text{Adm}}((s, t)) = \text{Adm}((t, s)) = \text{wahr},$$

womit $(s, t) \in \widetilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ folgt. Analog ergibt sich für $(s, t) \in \widetilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ auch $(t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$. Insgesamt folgt also

$$(t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+ \Leftrightarrow (s, t) \in \widetilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+,$$

womit $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein zu $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ transponierter Blockbaum ist. □

Lemma 3.2.15 (Eindeutigkeit). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ Clusterbäume sowie Adm eine Zulässigkeitsbedingung. Seien weiter $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein bzgl. Adm zulässiger Blockbaum für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ sowie $\tilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein zu $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ transponierter Blockbaum, dann ist $\tilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ eindeutig.*

Beweis. Sei $\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein weiterer zu $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ transponierter Blockbaum. Wir zeigen, dass $\tilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gleich sind.

Mit (i) und (ii) aus der Definition 3.2.13 eines transponierten Blockbaums gilt

$$(s, t) \in \tilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \Leftrightarrow (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \Leftrightarrow (s, t) \in \bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \quad (3.9)$$

und

$$(s, t) \in \tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+ \Leftrightarrow (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+ \Leftrightarrow (s, t) \in \bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+. \quad (3.10)$$

Damit sind die Mengen der Blöcke und der zulässigen Blätter von $\tilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gleich. Zur Vereinfachung bezeichnen wir die Menge der Blöcke beider Blockbäume $\tilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit V .

$\tilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sind zu $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ transponiert und damit insbesondere Blockbäume für $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$. Es folgt dann

$$\text{root}(\tilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}) = (\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}}), \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})) = \text{root}(\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}).$$

Wir zeigen nun, dass die Sohnaabbildungen beider Bäume gleich sind. Es bezeichne $\widetilde{\text{sons}}$ die Sohnaabbildung in $\tilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $\overline{\text{sons}}$ die Sohnaabbildung in $\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.

Sei $(s, t) \in V$ mit $\widetilde{\text{sons}}((s, t)) = \emptyset$, dann gilt entweder $(s, t) \in \tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ oder $\text{sons}(s) = \emptyset = \text{sons}(t)$. Im Fall von $(s, t) \in \tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ folgt mit (3.10) auch $(s, t) \in \bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$, also $\overline{\text{sons}}((s, t)) = \emptyset$. Gilt $\text{sons}(s) = \emptyset = \text{sons}(t)$, folgt ebenso $\overline{\text{sons}}((s, t)) = \emptyset$ aufgrund der Baumeigenschaft (vgl. Bemerkung 3.2.4). Für alle $(s, t) \in V$ gilt also

$$\widetilde{\text{sons}}((s, t)) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \overline{\text{sons}}((s, t)) = \emptyset.$$

Auf analoge Weise lässt sich für alle $(s, t) \in V$

$$\overline{\text{sons}}((s, t)) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\text{sons}}((s, t)) = \emptyset$$

zeigen. Mit der Kontraposition dieser beiden Aussagen folgt somit

$$\widetilde{\text{sons}}((s, t)) \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\text{sons}}((s, t)) \neq \emptyset$$

für alle $(s, t) \in V$. Sei nun $(s, t) \in V$ mit $\widetilde{\text{sons}}((s, t)) \neq \emptyset \neq \overline{\text{sons}}((s, t))$, dann gilt nach Darstellung der Söhne in Blockbäumen

$$\widetilde{\text{sons}}((s, t)) = \overline{\text{sons}}((s, t)).$$

Da dies für alle Blöcke aus V gilt, folgt die Gleichheit der Sohnaabbildungen $\widetilde{\text{sons}}$ und $\overline{\text{sons}}$. Aus der Gleichheit der Blöcke folgt dies auch für die Beschriftungen. Damit sind die beiden Blockbäume $\tilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gleich und der zu $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ transponierte Blockbaum eindeutig. \square

3 Hierarchische Matrizen

Durch die vorherigen beiden Lemmata lässt sich nun dem zu einem Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gehörenden transponierten Blockbaum eine eindeutige Bezeichnung zuordnen, aus der die Zugehörigkeit zu $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ersichtlich wird.

Bemerkung 3.2.16 (Transponierter Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ Clusterbäume, Adm eine Zulässigkeitsbedingung und $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein bzgl. Adm zulässiger Blockbaum für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$, dann zeigen die beiden Lemmata 3.2.14 und 3.2.15 Existenz und Eindeutigkeit eines zu $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ transponierten Blockbaums. Wir bezeichnen diesen im Folgenden mit*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$$

und sagen, dass $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$ der zu $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ transponierte Blockbaum ist. Die genaue Darstellung ist hierbei durch Lemma 3.2.14 gegeben. Des Weiteren lässt sich direkt nachweisen, dass $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ den zu $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$ transponierten Blockbaum darstellt.

Die Menge der Blätter von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$ bezeichnen wir mit

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T = \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{T+} \dot{\cup} \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{T-}$$

sowie die Sohnabbildung mit sons^T und die Zulässigkeitsbedingung mit Adm^T .

In der Definition 3.2.13 des transponierten Blockbaums werden nur Eigenschaften der zulässigen, nicht aber der unzulässigen Blätter gefordert. Folgendes Korollar zeigt, dass sich die Bedingung (ii) aus dieser Definition auf unzulässige Blätter erweitern lässt.

Korollar 3.2.17 (Unzulässige Blätter). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum und $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$ der zu $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ transponierte Blockbaum, dann gilt $(t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$ genau dann, wenn $(s, t) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{T-}$.*

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei $(t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$, dann gilt

$$\text{sons}(t) = \emptyset = \text{sons}(s). \quad (3.11)$$

Mit der Bedingung (i) aus Definition 3.2.13 folgt $(s, t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$ und (3.11) liefert $(s, t) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$. Würde $(s, t) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{T+}$ gelten, dann mit Bedingung (ii) aus Definition 3.2.13 auch $(t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{T+}$. Dies wäre ein Widerspruch zu $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{T+} \cap \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{T-} = \emptyset$, womit $(s, t) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{T-}$ folgt.

„ \Leftarrow “: Diese Implikation folgt analog zu der vorherigen mit vertauschten Rollen von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$. \square

Bemerkung 3.2.18 (Nicht-Blatt-Blöcke). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum und $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$ der zugehörige transponierte Blockbaum, dann folgt aus Bedingung (ii) der Definition 3.2.13 zusammen mit Korollar 3.2.17 die Äquivalenz*

$$(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \Leftrightarrow (s, t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T.$$

Bemerkung 3.2.19 (Verwendung des transponierten Blockbaums). *Wie zu Beginn dieses Abschnitts über transponierte Blockbäume bereits erwähnt, sind diese ein rein theoretisches Hilfsmittel zur eleganten Übertragung bestimmter Aussagen von Zeilen- auf Spaltenclusterbäume — bzw. andersherum. In der Praxis werden diese Bäume also i.A. nie*

konkret aufgestellt. Dies führt insbesondere dazu, dass z.B. ein Algorithmus, der einmal mit dem Blockbaum selbst und einmal mit dem transponierten Blockbaum aufgerufen werden muss, in der Praxis für den zweiten Fall ggf. anzupassen ist. Vergleichbar ist diese Situation beispielsweise mit der Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix und ihrem transponierten Gegenstück. Liegt die transponierte Matrix nicht explizit vor, so muss ein zweiter Algorithmus geschrieben bzw. es müssen die Schleifen des vorherigen angepasst werden.

Von besonderem Interesse werden im Laufe der vorliegenden Arbeit Blöcke sein, deren Zeilen- und Spaltencluster sich nicht auf demselben Level befinden. Eine erste Charakterisierung hierfür liefert das folgende Lemma. Aufgrund der dort zueinander „symmetrischen“ Aussagen in (a) und (b) illustriert die Beweisführung des (b)-Teils die in Bemerkung 3.2.19 beschriebene Verwendung des transponierten Blockbaums.

Lemma 3.2.20. *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum. Für alle $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$*

(a) mit $\text{level}(t) \leq \text{level}(s)$ gilt

$$\{(t, s^+) \in \{t\} \times \text{pred}(s) \mid \text{level}(t) \leq \text{level}(s^+)\} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$$

und

(b) mit $\text{level}(t) \geq \text{level}(s)$ gilt

$$\{(t^+, s) \in \text{pred}(t) \times \{s\} \mid \text{level}(t^+) \geq \text{level}(s)\} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}.$$

Beweis. (a) Für alle $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gilt $\text{level}(t) \leq \text{level}(s)$ genau dann, wenn $0 \leq \text{level}(s) - \text{level}(t) \in \mathbb{N}_0$. Der Beweis verläuft induktiv über $\text{level}(s) - \text{level}(t) \in \mathbb{N}_0$ für alle $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $\text{level}(t) \leq \text{level}(s)$.

Für $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $\text{level}(s) - \text{level}(t) = 0$ gilt $\text{level}(s) = \text{level}(t)$, also

$$\{(t, s^+) \in \{t\} \times \text{pred}(s) \mid \text{level}(t) \leq \text{level}(s^+)\} = \{(t, s)\}$$

und da $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gilt, folgt in diesem Fall die Aussage.

Sei nun $\ell \in \mathbb{N}_0$ so gegeben, dass

$$\{(t, s^+) \in \{t\} \times \text{pred}(s) \mid \text{level}(t) \leq \text{level}(s^+)\} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$$

für alle $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $\text{level}(s) - \text{level}(t) = \ell$ gilt.

Für $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $\text{level}(s) - \text{level}(t) = \ell + 1$ folgt

$$\text{level}(s) = \text{level}(t) + \ell + 1 \geq 1 > 0.$$

Es existiert somit $s^+ := \text{father}(s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ und es gilt $\text{level}(s^+) = \text{level}(s) - 1$. Damit folgt

$$\text{level}(s^+) - \text{level}(t) = \text{level}(s) - 1 - \text{level}(t) = \ell + 1 - 1 = \ell.$$

3 Hierarchische Matrizen

Mit $0 < \ell + 1 = \text{level}(s) - \text{level}(t)$ gilt insbesondere $\text{level}(t) < \text{level}(s)$, womit nach Lemma 3.2.6 (a) $\text{level}((t, s)) \neq 0$ also $(t, s) \neq \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}})$ folgt. Lemma 3.2.8 über die rekursive Darstellung des Vaters liefert $(t, s^+) = (t, \text{father}(s)) = \text{father}((t, s)) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf (t, s^+) an und erhalten

$$\{(t, s^{++}) \in \{t\} \times \text{pred}(s^+) \mid \text{level}(t) \leq \text{level}(s^{++})\} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}.$$

Die rekursive Darstellung der Vorfahren (vgl. Lemma 2.4.19) liefert mit $s^+ = \text{father}(s)$

$$\text{pred}(s) = \{s\} \dot{\cup} \text{pred}(s^+)$$

und da $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $\text{level}(s) = \text{level}(t) + \ell + 1 > \text{level}(t)$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} & \{(t, s)\} \cup \{(t, s^{++}) \in \{t\} \times \text{pred}(s^+) \mid \text{level}(t) \leq \text{level}(s^{++})\} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \\ \Leftrightarrow & \{(t, s^{++}) \in \{t\} \times \text{pred}(s) \mid \text{level}(t) \leq \text{level}(s^{++})\} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \end{aligned}$$

und somit die Aussage.

(b) Sei $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $\text{level}(t) \geq \text{level}(s)$, dann gilt $(s, t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$ (vgl. Bemerkung 3.2.18) mit $\text{level}(s) \leq \text{level}(t)$. Da $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$ ein Blockbaum ist, folgt mit Teil (a)

$$\{(s, t^+) \in \{s\} \times \text{pred}(t) \mid \text{level}(s) \leq \text{level}(t^+)\} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$$

und damit

$$\{(t^+, s) \in \text{pred}(t) \times \{s\} \mid \text{level}(t^+) \geq \text{level}(s)\} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}},$$

also die Aussage. □

Schwachbesetztheit

Ein wichtiges Konzept ist das der *Schwachbesetztheit* eines Blockbaums, wie es z.B. in [25, 27, 6] verwendet wird, und auf dem eine Vielzahl von Aufwands- sowie Speicherbedarfsabschätzungen für \mathcal{H}^2 -Matrizen beruhen (siehe insbesondere [6]). Da dieses Konzept auch grundlegend für spätere Abschnitte der vorliegenden Arbeit ist, widmet sich der Abschnitt 3.4 einer genaueren Untersuchung. An dieser Stelle werden nur die Rahmenbedingungen für die spätere Diskussion festlegt und mit einer Abschätzung der Mächtigkeit eines Blockbaums gezeigt, wie sich diese Eigenschaft ausnutzen lässt.

Die folgenden Definitionen lassen sich als Verallgemeinerung der Schwachbesetztheit von Matrizen ansehen (vgl. Definition 2.1.9).

Definition 3.2.21 (Blockzeile und -spalte). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, dann definieren wir für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ die Blockzeile als*

$$\text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) := \{s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \mid (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}\} \quad (3.12)$$

und für alle $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ die Blockspalte als

$$\text{col}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) := \{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \mid (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}\}. \quad (3.13)$$

Wenn aus dem Zusammenhang der Bezug zu dem Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ klar hervorgeht, schreiben wir für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ vereinfachend auch

$$\text{row}(t) \quad \text{und} \quad \text{col}(s)$$

für die entsprechende Blockzeile bzw. -spalte.

Die Schwachbesetztheit eines Blockbaums bezieht sich nun auf die oben definierten Mengen. Lassen sich die Mächtigkeiten aller Blockzeilen und -spalten unabhängig von den Mächtigkeiten der zugrundeliegenden Indexmengen ($\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$) beschränken, dann nennen wir eine obere Schranke hierfür *Schwachbesetztheitskonstante* des entsprechenden Blockbaums.

Definition 3.2.22 (Schwachbesetztheit). Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum. Existiert ein Element $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und alle $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$

$$\#\text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) \leq C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \quad \text{sowie} \quad \#\text{col}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) \leq C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$$

gilt, dann nennen wir den Blockbaum $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ -schwachbesetzt. Verwenden wir diesen Begriff ohne $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ einzuführen, so setzen wir implizit voraus, dass $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \in \mathbb{N}$ gilt. Lässt sich $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ unabhängig von $\#\mathcal{I}$ sowie $\#\mathcal{J}$ beschränken, dann nennen wir diesen Wert auch Schwachbesetztheitskonstante von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.

Geht aus dem Zusammenhang die Zugehörigkeit von $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ zu dem Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ eindeutig hervor, so werden wir für diesen Wert vereinfachend auch nur die Bezeichnung C_{sp} verwenden.

Lemma 3.2.23 (Mächtigkeit). Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein C_{sp} -schwachbesetzter Blockbaum.

(a) Es gilt

$$\#\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \leq C_{\text{sp}} \min\{\#\mathcal{I}, \#\mathcal{J}\}.$$

(b) Gilt $\#\text{sons}(r) \neq 1$ für alle $r \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \cup \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$, dann folgt

$$\#\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \leq 2C_{\text{sp}} \min\{\#\mathcal{I}, \#\mathcal{J}\}.$$

Beweis. (Vgl. [27, Lemma 2.2]).

(a) Es gilt zum einen mit der Blockzeile

$$\begin{aligned} \#\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} &= \sum_{(t,s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} 1 = \sum_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} \sum_{s \in \text{row}(t)} 1 = \sum_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} \#\text{row}(t) \\ &\leq C_{\text{sp}} \sum_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} 1 = C_{\text{sp}} \#\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \end{aligned}$$

3 Hierarchische Matrizen

und zum anderen analog mit der Blockspalte

$$\#\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} = \sum_{s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}} \#\text{col}(s) \leq C_{\text{sp}} \#\mathcal{T}_{\mathcal{J}}.$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\#\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \leq C_{\text{sp}} \min\{\#\mathcal{T}_{\mathcal{I}}, \#\mathcal{T}_{\mathcal{J}}\}.$$

(b) Mit Lemma 3.1.7 und Teil (a) dieses Lemmas folgt

$$\#\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \leq C_{\text{sp}} \min\{\#\mathcal{T}_{\mathcal{I}}, \#\mathcal{T}_{\mathcal{J}}\} \stackrel{3.1.7}{\leq} 2C_{\text{sp}} \min\{\#\mathcal{I}, \#\mathcal{J}\}.$$

□

Bemerkung 3.2.24 (Mächtigkeit). *Offensichtlich gilt für die Menge aller Blätter eines Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ die Inklusion*

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} = \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+ \dot{\cup} \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^- \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}.$$

Damit folgt nach Lemma 3.2.23 — unter den dortigen Voraussetzungen — auch

$$\#\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \leq 2C_{\text{sp}} \min\{\#\mathcal{I}, \#\mathcal{J}\},$$

also insbesondere

$$\#\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+ \leq 2C_{\text{sp}} \min\{\#\mathcal{I}, \#\mathcal{J}\} \quad \text{und} \quad \#\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^- \leq 2C_{\text{sp}} \min\{\#\mathcal{I}, \#\mathcal{J}\}.$$

Für einen Blockbaum lassen sich die Blockzeilen und -spalten über die Blockspalten bzw. -zeilen des transponierten Blockbaums darstellen. Diese Tatsache ermöglicht es uns, später Aussagen nur für die Blockzeilen oder -spalten zu beweisen und diese dann unter Zuhilfenahme des transponierten Blockbaums auf die jeweils anderen Mengen zu übertragen.

Korollar 3.2.25 (Transponierter Blockbaum). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, dann gilt*

$$\text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) = \text{col}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, t) \quad \text{für alle } t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$$

und

$$\text{col}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) = \text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, s) \quad \text{für alle } s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}.$$

Beweis. Für $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ gilt

$$\text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) = \{s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \mid (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}\} = \{s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \mid (s, t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T\} = \text{col}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, t)$$

und für $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ gilt

$$\text{col}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) = \{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \mid (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}\} = \{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \mid (s, t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T\} = \text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, s).$$

□

Bevor eine diese Arbeit überspannende Analyse der Blockzeilen (3.12) und -spalten (3.13) sowie derer Mächtigkeiten vorgenommen wird, dient der nachstehende Abschnitt der formalen Definition von \mathcal{H}^2 -Matrizen.

3.3 \mathcal{H}^2 -Matrizen

In diesem Abschnitt werden \mathcal{H}^2 -Matrizen in der für diese Arbeit benötigten Form eingeführt, wobei [6, Abschnitt 3.6] hierbei als Grundlage dient. Des Weiteren werden die für die folgenden Betrachtungen wichtigsten Eigenschaften und Aussagen angegeben, um diese in den anschließenden Kapiteln verwenden zu können.

In typischen Anwendungen von \mathcal{H}^2 -Matrizen ist die Grundidee, eine vollbesetzte Matrix zu approximieren, um so zum einen Speicher zu sparen und zum anderen arithmetische Operationen in vertretbarer Zeit ausführen zu können. Wie im vorherigen Abschnitt erwähnt, basiert die lokale Struktur von \mathcal{H}^2 -Matrizen auf Niedrigrangdarstellungen. Abhängig von der speziellen Anwendung ist eine Zulässigkeitsbedingung so zu wählen, dass in allen zulässigen Blättern eine — in faktorisierte Form vorliegende — Approximation durch Niedrigrangmatrizen verwendet werden kann, ohne eine gewisse Fehlertoleranzgrenze zu übersteigen.

Um eine Matrix in der durch die Blattmenge eines zulässigen Blockbaums gegebenen Partition der zugrundeliegenden Indexmenge (vgl. Korollar 3.2.5) darstellen zu können, definieren wir sogenannte *Abschneidematrizen*.

Definition 3.3.1 (Abschneidematrix). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, dann nennen wir für $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ die Matrix*

$$\chi_t := \sum_{i \in \hat{t}} e_i e_i^* \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$$

die Abschneidematrix bezüglich t , wobei $\{e_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ hier und im Folgenden die Standardbasis des $\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ sei.

Die nächsten beiden Korollare zeigen, welche Eigenschaften Abschneidematrizen besitzen. Von besonderem Interesse für die Darstellung einer Matrix in Blockform über einen Blockbaum ist Korollar 3.3.3.

Korollar 3.3.2 (Symmetrie und Projektion). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, dann gelten*

$$\chi_t = \chi_t^* \quad \text{und} \quad \chi_t \chi_t = \chi_t$$

für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$.

Beweis. Sei $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, dann folgt

$$\chi_t^* = \left(\sum_{i \in \hat{t}} e_i e_i^* \right)^* = \sum_{i \in \hat{t}} (e_i e_i^*)^* = \sum_{i \in \hat{t}} e_i e_i^* = \chi_t$$

und mit $e_i^* e_j = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \mathcal{I}$ auch

$$\chi_t \chi_t = \left(\sum_{i \in \hat{t}} e_i e_i^* \right) \left(\sum_{j \in \hat{t}} e_j e_j^* \right) = \sum_{i \in \hat{t}} \sum_{j \in \hat{t}} e_i (e_i^* e_j) e_j^* = \sum_{i \in \hat{t}} e_i e_i^* = \chi_t.$$

□

3 Hierarchische Matrizen

Korollar 3.3.3 (Blockweise Darstellung). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum und $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, dann gilt*

$$X = \sum_{(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \chi_t X \chi_s.$$

Beweis. Für alle $(t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gilt

$$\chi_t X \chi_s = \left(\sum_{i \in \hat{t}} e_i e_i^* \right) X \left(\sum_{j \in \hat{s}} e_j e_j^* \right) = \sum_{i \in \hat{t}} \sum_{s \in \hat{s}} e_i (e_i^* X e_j) e_j^* = \sum_{(i,j) \in \hat{t} \times \hat{s}} x_{ij} e_i e_j^*$$

und damit

$$(\chi_t X \chi_s)_{ij} = x_{ij} \quad \text{für alle } (i, j) \in \hat{t} \times \hat{s}.$$

Da die Beschriftungen aller Blätter des Blockbaums disjunkt sind (vgl. Korollar 3.2.5), folgt die Aussage. \square

Clusterbasen

Den Ausgangspunkt der Definition von \mathcal{H}^2 -Matrizen bilden die sogenannten *Clusterbasen*, bei denen — vorerst unabhängig vom Blockbaum — jedem Cluster eines Clusterbaums eine Matrix zugeordnet wird. Die Gesamtheit dieser dient dann der Konstruktion der für eine \mathcal{H}^2 -Matrix benötigten Niedrigrangmatrizen.

Definition 3.3.4 (Rangverteilung). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, dann nennen wir eine Familie $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}} = (K_t)_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ von endlichen Indexmengen K_t für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ eine Rangverteilung für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$.*

Definition 3.3.5 (Clusterbasis). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum und $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}} = (K_t)_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ eine Rangverteilung für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, dann nennen wir eine Familie $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}} = (V_t)_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ von Matrizen mit*

$$V_t \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times K_t} \quad \text{und} \quad V_t = \chi_t V_t \quad \text{für alle } t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$$

eine Clusterbasis für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit Rangverteilung $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$. Die Matrizen der Familie $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ nennen wir Clusterbasismatrizen.

Eine spezielle Klasse bilden die *orthogonalen Clusterbasen*.

Definition 3.3.6 (Orthogonale Clusterbasis). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ ein Rangverteilung für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}} = (V_t)_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ eine Clusterbasis für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit Rangverteilung $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$, dann nennen wir $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ eine orthogonale Clusterbasis, wenn*

$$V_t^* V_t = I \quad \text{für alle } t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$$

gilt, alle Clusterbasismatrizen also orthogonal im Sinne von Definition 2.1.14 sind.

Sind die Clusterbasismatrizen nicht unabhängig voneinander, sondern lassen sich die zu allen Nicht-Blatt-Clustern gehörenden Matrizen über die jeweiligen Söhne im Baum ausdrücken, so sprechen wir von einer *geschachtelten Clusterbasis*.

Definition 3.3.7 (Geschachtelte Clusterbasis). Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}} = (K_t)_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ eine Rangverteilung für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}} = (V_t)_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ eine Clusterbasis für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit Rangverteilung $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$. Existiert eine Familie $E_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}} = (E_t)_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ von Matrizen mit

$$E_{t^*} \in \mathbb{R}^{K_{t^*} \times K_t} \quad \text{für alle } t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \text{ und } t^* \in \text{sons}(t) \quad (3.14)$$

sowie

$$V_t = \sum_{t^* \in \text{sons}(t)} V_{t^*} E_{t^*} \quad \text{für alle } t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \quad (3.15)$$

dann nennen wir $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ eine geschachtelte Clusterbasis für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit Rangverteilung $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$. Die Matrizen der Familie $E_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ nennen wir Transfermatrizen.

Im Folgenden schreiben wir für eine geschachtelte Clusterbasis $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ auch $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und setzen voraus, dass $E = E_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ die zugehörige Familie von Transfermatrizen darstellt sowie $K = K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ die zugrundeliegende Rangverteilung sei. Ist die Rangverteilung für die aktuelle Betrachtung unerheblich, dann schreiben wir vereinfachend auch $(V, E)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$.

Da aus dem Index die Zugehörigkeit der geschachtelten Clusterbasis zu dem Clusterbaum bereits hervorgeht, lassen wir den Zusatz „für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ “ auch weg.

Liegt eine Clusterbasis in geschachtelter Form vor, dann ist an (3.15) zu erkennen, dass die Clusterbasismatrizen nur für die Blätter des Clusterbaums und für alle anderen Cluster nur die Transfermatrizen aus (3.14) gespeichert werden müssen.

Lemma 3.3.8 (Speicherbedarf einer geschachtelten Clusterbasis). Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum und $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ eine geschachtelte Clusterbasis. Mit

$$k_t := \begin{cases} \max\{\#K_t, \#\hat{t}\} & , \text{falls } \text{sons}(t) = \emptyset, \\ \max\{\#K_t, \sum_{t^* \in \text{sons}(t)} \#K_{t^*}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, benötigt die geschachtelte Clusterbasis nicht mehr als

$$\sum_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} k_t \#K_t \leq \sum_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} k_t^2$$

Speicherplätze.

Beweis. Siehe [6, Lemma 3.35]. □

Bemerkung 3.3.9 (Vereinfachende Annahmen). Es seien die Voraussetzungen von Lemma 3.3.8 gegeben. Gilt $\#\hat{t} \leq \#K_t$ für alle $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und existiert ein $k \in \mathbb{N}_0$ so, dass $\#K_t \leq k$ für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ gilt, dann folgt mit $C_{\text{sons}} := \max_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} \#\text{sons}(t)$, dass die geschachtelte Clusterbasis nicht mehr als

$$C_{\text{sons}} k^2 \#\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$$

Speicherplätze benötigt. Unter der Voraussetzung $\text{sons}(t) \neq 1$ für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ folgt nach Lemma 3.1.7 $\#\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \leq 2\#\mathcal{I}$, womit der Speicherbedarf der Clusterbasis durch

$$2C_{\text{sons}} k^2 \#\mathcal{I}$$

beschränkt ist.

\mathcal{H}^2 -Matrizen

Mit den vorherigen Definitionen sind wir nun in der Lage, \mathcal{H}^2 -Matrizen einzuführen.

Definition 3.3.10 (\mathcal{H}^2 -Matrix). Seien ein Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie zwei geschachtelte Clusterbasen $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $(W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ gegeben. Eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ nennen wir \mathcal{H}^2 -Matrix für $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $(W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$, wenn eine Familie $S = (S_b)_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+}$ von Matrizen $S_b \in \mathbb{R}^{K_t \times K_s}$ für alle $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ so existiert, dass

$$X = \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+} V_t S_b W_s^* + \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^-} \chi_t X \chi_s \quad (3.16)$$

gilt.

Für die rechte Seite von (3.16) verwenden wir auch die Bezeichnungen \mathcal{H}^2 -Matrix-Darstellung oder \mathcal{H}^2 -Matrix-Format von X . $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ nennen wir Zeilenbasis von X , $(W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ Spaltenbasis von X und die Matrizen der Familie S Kopplungsmatrizen.

Die Menge aller \mathcal{H}^2 -Matrizen für $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $(W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ bezeichnen wir mit

$$\mathcal{H}^2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}, (W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}).$$

Wie an (3.16) zu sehen ist, sind die zu zulässigen Blättern gehörenden Matrixblöcke in faktorisierter Form gegeben. Diese besteht aus einer Kopplungs- und zwei Clusterbasismatrizen. Setzen wir — mit den Notationen aus obiger Definition — für einen Block $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ die Matrizen $\tilde{U} := V_t \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times K_t}$ und $\tilde{V} := W_s S_b^* \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times K_t}$, dann ist $\tilde{U} \tilde{V}^*$ eine Niedrigrangdarstellung von $\chi_t X \chi_s$ im Sinne von Definition 2.1.16. Analog ließe sich eine Niedrigrangdarstellung über $\tilde{U} := V_t S_b \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times L_s}$ und $\tilde{V} := W_s \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times L_s}$ definieren. In unzulässigen Blättern wird keine Forderung an die Einträge der Matrix gestellt. Da wir später eine gegebene Matrix durch eine \mathcal{H}^2 -Matrix approximieren wollen, gehen wir davon aus, dass die zu unzulässigen Blättern gehörenden Matrixblöcke nicht approximiert werden und damit vollbesetzt vorliegen. Hierbei sind nur die Nicht-Null-Einträge zu speichern. Es ergibt sich folgende Aussage über den Speicherbedarf einer \mathcal{H}^2 -Matrix.

Lemma 3.3.11 (Speicherbedarf einer \mathcal{H}^2 -Matrix). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein C_{sp} -schwachbesetzter Blockbaum sowie $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $(W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ zwei geschachtelte Clusterbasen. Mit

$$k_t := \begin{cases} \max\{\#K_t, \#\hat{t}\} & , \text{ falls } \text{sons}(t) = \emptyset, \\ \max\{\#K_t, \sum_{t^* \in \text{sons}(t)} \#K_{t^*}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$l_s := \begin{cases} \max\{\#L_s, \#\hat{s}\} & , \text{ falls } \text{sons}(s) = \emptyset, \\ \max\{\#L_s, \sum_{s^* \in \text{sons}(s)} \#L_{s^*}\} & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$, benötigt eine \mathcal{H}^2 -Matrix nicht mehr als

$$\frac{C_{\text{sp}} + 2}{2} \left(\sum_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} k_t^2 + \sum_{s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}} l_s^2 \right) \quad (3.17)$$

Speicherplätze.

Beweis. Siehe [6, Lemma 3.38]. \square

Es ist in obigen Lemma zu beachten, dass der Speicherbedarf der beiden geschachtelten Clusterbasen in (3.17) bereits integriert ist.

Bemerkung 3.3.12 (Vereinfachende Annahmen). *Es seien die Voraussetzungen von Lemma 3.3.11 gegeben. Gilt*

$$\#\hat{t} \leq \#K_t \quad \text{und} \quad \#\hat{s} \leq \#L_s \quad \text{für alle } t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}, s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$$

(vgl. Bemerkung 3.3.9) und existiert ein $k \in \mathbb{N}_0$ so, dass

$$\#K_t \leq k \quad \text{und} \quad \#L_s \leq k \quad \text{für alle } t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}, s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$$

gilt, dann benötigt eine \mathcal{H}^2 -Matrix mit $C_{\text{sons}} := \max_{r \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \cup \mathcal{T}_{\mathcal{J}}} \# \text{sons}(r)$ nicht mehr als

$$\frac{C_{\text{sp}} + 2}{2} C_{\text{sons}}^2 k^2 (\#\mathcal{T}_{\mathcal{I}} + \#\mathcal{T}_{\mathcal{J}})$$

Speicherplätze. Unter der Voraussetzung $\# \text{sons}(r) \neq 1$ für alle $r \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \cup \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ folgt nach Lemma 3.1.7

$$\#\mathcal{T}_{\mathcal{I}} + \#\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \leq 2(\#\mathcal{I} + \#\mathcal{J}),$$

womit der Speicherbedarf sich asymptotisch linear zu $(\#\mathcal{I} + \#\mathcal{J})$ verhält — vorausgesetzt alle anderen auftretenden Größen lassen sich unabhängig von $\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$ beschränken.

Eine für die folgenden Abschnitte fundamentale Eigenschaft von \mathcal{H}^2 -Matrizen ist, dass diese für einen festen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und feste Clusterbasen einen Teilraum des $\mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ bilden.

Korollar 3.3.13 (Teilraum). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum sowie $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ zwei geschachtelte Clusterbasen, dann ist $\mathcal{H}^2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}, W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}})$ ein Teilraum von $\mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.*

Beweis. Siehe [6, Remark 3.37]. \square

Für eine ausführlichere Analyse von \mathcal{H}^2 -Matrizen im Bezug auf arithmetische Operationen sowie die Approximationseigenschaften in den diversen Anwendungsgebieten sei generell auf [6] verwiesen.

3.4 Schwachbesetztheit

Dieser Abschnitt befasst sich nun genauer mit der Untersuchung der Schwachbesetztheit von Blockbäumen (vgl. Definition 3.2.22).

Für einen Block $b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ eines Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ kann beim Vorhandensein zueinander unbalancierter Clusterbäume

$$\text{level}(t) \neq \text{level}(s)$$

gelten (vgl. Lemma 3.2.6). Diese Tatsache führt dazu, dass wir wenig über den Level von Elementen der Blockzeile oder -spalte eines festen Clusters aussagen können. Betrachtet man die Beweistechniken für die Existenz einer Schwachbesetztheitskonstante in typischen Anwendungen (siehe z.B. [27, 35]), so ist die Levelgleichheit von Zeilen- und Spaltencluster dort eine essentielle Eigenschaft. Wir werden im Folgenden davon ausgehen, dass der Teil einer Blockzeile und -spalte, der sich durch Levelgleichheit im obigen Sinne auszeichnet, in diversen Anwendungen — also für eine konkrete Zulässigkeitsbedingung — tendenziell besser gegen eine Konstante abschätzbar ist, als der Teil, in dem diese Eigenschaft nicht gegeben ist. Mit dem allgemeinen Konzept in Abschnitt 3.4.1 wird gezeigt, wie die Ungleichheit der Level allgemein beschrieben werden kann und das spezielle Konzept in Abschnitt 3.4.2 liefert dann ein Kriterium, welches in der Anwendung — dazu zählt auch die Anwendung in dieser Arbeit (siehe Kapitel 4) — besser nachweisbar ist.

3.4.1 Allgemeines Konzept

Für einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und alle Cluster $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ gilt, wie oben erwähnt, nur in Spezialfällen

$$\text{level}(t) = \text{level}(s) \quad \text{für alle } s \in \text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t).$$

Zu diesem Fall kommen im Allgemeinen noch zwei weitere hinzu, die durch die folgende Definition beschrieben werden.

Definition 3.4.1. Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum. Für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ seien

$$\begin{aligned} \text{row}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) &:= \{s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \mid (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \wedge \text{level}(s) = \text{level}(t)\}, \\ \text{row}^<(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) &:= \{s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \mid (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \wedge \text{level}(s) < \text{level}(t)\} \\ \text{und } \text{row}^>(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) &:= \{s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \mid (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \wedge \text{level}(s) > \text{level}(t)\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

sowie analog für $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$

$$\begin{aligned} \text{col}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) &:= \{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \mid (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \wedge \text{level}(t) = \text{level}(s)\}, \\ \text{col}^<(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) &:= \{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \mid (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \wedge \text{level}(t) < \text{level}(s)\} \\ \text{und } \text{col}^>(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) &:= \{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \mid (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \wedge \text{level}(t) > \text{level}(s)\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

definiert. Wir lassen im Folgenden den Zusatz „ $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ “ weg, wenn die Zugehörigkeit zu dem Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ aus dem Zusammenhang ersichtlich ist und schreiben vereinfachend

$$\begin{aligned} \text{row}^=(t), \text{row}^<(t) \text{ und } \text{row}^>(t) &\quad \text{für alle } t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \\ \text{sowie } \text{col}^=(s), \text{col}^<(s) \text{ und } \text{col}^>(s) &\quad \text{für alle } s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}. \end{aligned}$$

Für einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gelten die Darstellungen

$$\text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) = \text{row}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) \dot{\cup} \text{row}^<(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) \dot{\cup} \text{row}^>(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) \quad \text{für alle } t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$$

und

$$\text{col}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) = \text{col}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) \dot{\cup} \text{col}^<(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) \dot{\cup} \text{col}^>(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) \quad \text{für alle } s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}.$$

Im Fall zueinander balancierter Clusterbäume $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ gilt

$$\begin{aligned} \text{row}^<(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) &= \text{row}^>(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) = \emptyset \\ \text{sowie } \text{col}^<(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) &= \text{col}^>(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) = \emptyset \end{aligned}$$

und damit

$$\text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) = \text{row}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) \quad \text{sowie} \quad \text{col}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) = \text{col}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s)$$

für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und alle $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$.

Definition 3.4.2 (Levelgleichheit). *Es sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, dann definieren wir*

$$C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}^= := \max_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}, s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}} \{ \# \text{row}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t), \# \text{col}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) \}.$$

Geht aus dem Kontext eindeutig hervor, welcher Blockbaum zugrundeliegt, schreiben wir auch vereinfachend $C_{\text{sp}}^=$ anstatt $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}^=$.

Bemerkung 3.4.3 (Notwendigkeit). *Für einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ sowie $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ gelten die Inklusionen*

$$\text{row}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) \subseteq \text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) \quad \text{und} \quad \text{col}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) \subseteq \text{col}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s),$$

womit

$$C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}^= \leq \max_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}, s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}} \{ \# \text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t), \# \text{col}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) \}$$

folgt. Die Beschränktheit von $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}^=$ unabhängig von $\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$ ist also ein notwendiges Kriterium für die Existenz einer Schwachbesetztheitskonstante von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Anders formuliert bedeutet dies, dass $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}^=$ unabhängig von $\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$ beschränkt sein muss, falls für $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ eine Schwachbesetztheitskonstante existiert.

Bemerkung 3.4.4 (Beschränktheit von $\text{row}^=$ und $\text{col}^=$). *Wie in [27] gezeigt, lässt sich für eine große Klasse von Anwendungen die Beschränktheit von $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}^=$ unabhängig von $\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$ nachweisen. [27, Remark 4.7] stellt dies auch für die Verwendung einer im Kontext der \mathcal{H}^2 -Matrizen üblichen Zulässigkeitsbedingung sicher.*

Korollar 3.4.5 (Transponierter Blockbaum). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, dann gelten für den transponierten Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$ die Mengengleichheiten*

$$\begin{aligned} \text{col}^<(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) &= \text{row}^<(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, s) \\ \text{col}^>(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) &= \text{row}^>(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, s) \\ \text{und } \text{col}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) &= \text{row}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, s) \end{aligned}$$

für alle $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$.

3 Hierarchische Matrizen

Beweis. Sei $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \text{col}^<(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) &= \{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \mid (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \wedge \text{level}(t) < \text{level}(s)\} \\ &= \{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \mid (s, t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T \wedge \text{level}(t) < \text{level}(s)\} \\ &= \text{row}^<(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, s). \end{aligned}$$

Alle anderen Mengengleichheiten lassen sich analog beweisen. \square

Korollar 3.4.5 ermöglicht es uns, Aussagen von den jeweiligen Blockzeilen auf die Blockspalten zu übertragen.

Das Ziel ist nun, die Mächtigkeiten der Mengen $\text{row}^<(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t)$ und $\text{row}^>(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t)$ sowie $\text{col}^<(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s)$ und $\text{col}^>(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s)$ für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ abzuschätzen.

Definition 3.4.6 (Unbalanciertheit). Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, dann definieren wir für alle $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$

$$\begin{aligned} U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) &:= \{s^* \in \text{sons}^*(s) \mid (t, s^*) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}\} \\ \text{und } U_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) &:= \{t^* \in \text{sons}^*(t) \mid (t^*, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}\} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} C_{U_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} &:= \max_{\substack{t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \\ s \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t)}} \#U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) \\ \text{und } C_{U_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} &:= \max_{\substack{s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}} \\ t \in \text{col}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s)}} \#U_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Sollte die Verwechslung mit einem anderen Blockbaum ausgeschlossen sein, schreiben wir auch vereinfachend

$$\begin{aligned} U_1(t, s) &\text{ anstatt } U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) \\ \text{und } U_2(t, s) &\text{ anstatt } U_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) \end{aligned}$$

für alle $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie

$$\begin{aligned} C_{U_1} &\text{ anstatt } C_{U_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \\ \text{und } C_{U_2} &\text{ anstatt } C_{U_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.4.7 (Spezialfälle). Es könnte in (3.20) potentiell der Fall auftreten, dass es in einem Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ keinen Block $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gibt, für den $\text{level}(t) = \text{level}(s)$ mit $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ oder $s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$ gilt. Zum Beispiel wäre es möglich, dass beim Aufstellen des Blockbaums mit Algorithmus 3.2.1 alle Blätter des Blockbaums zulässig werden, bevor überhaupt ein Blatt eines Clusterbaums erreicht wurde. Die Maxima in (3.20) würden dann potentiell über die leere Menge gebildet werden. In diesem Fall folgt allerdings nach Konstruktion der Söhne für alle Blöcke $b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ immer $\text{level}(t) = \text{level}(s)$ und damit

$$\begin{aligned} \text{row}^<(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) &= \text{row}^>(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) = \emptyset \quad \text{für alle } t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \\ \text{und } \text{col}^<(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) &= \text{col}^>(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) = \emptyset \quad \text{für alle } s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}. \end{aligned}$$

Da $C_{U_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ und $C_{U_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ nur für die Abschätzung der Mächtigkeiten dieser Mengen benötigt werden, setzen wir o.B.d.A.

$$C_{U_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} := 0, \quad \text{falls} \quad \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) = \emptyset \text{ für alle } t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$$

und

$$C_{U_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} := 0, \quad \text{falls} \quad \text{col}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) = \emptyset \text{ für alle } s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$$

gilt.

Auch hier betrachten wir zuerst wieder, wie sich die Mengen und Werte aus Definition 3.4.6 bezüglich des transponierten Blockbaums darstellen.

Korollar 3.4.8 (Transponierter Blockbaum). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, dann gelten für alle $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$*

$$U_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) = U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, (s, t)) \quad \text{und} \quad C_{U_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} = C_{U_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T}$$

sowie

$$U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) = U_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, (s, t)) \quad \text{und} \quad C_{U_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} = C_{U_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T}.$$

Beweis. Sei $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, dann gilt mit Bemerkung 3.2.18

$$\begin{aligned} U_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) &= \{t^* \in \text{sons}^*(t) \mid (t^*, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}\} \\ &= \{t^* \in \text{sons}^*(t) \mid (s, t^*) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T\} = U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, (s, t)) \end{aligned}$$

und damit nach Korollar 3.4.5

$$\begin{aligned} C_{U_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} &= \max_{\substack{s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}} \\ t \in \text{col}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s)}} \#U_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) \\ &= \max_{\substack{s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}} \\ t \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, s)}} \#U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, (s, t)) = C_{U_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T}. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$ der zu $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ transponierte Blockbaum ist, ist $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ der zu $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$ transponierte Blockbaum. Mit obiger Aussage und $(s, t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$ folgt

$$U_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, (s, t)) = U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) \quad \text{sowie} \quad C_{U_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T} = C_{U_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$$

und damit die Aussage. \square

Die Werte $C_{U_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ und $C_{U_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ sind ein Maß dafür, wie stark sich die *Unbalanciertheit* der Clusterbäume $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ auf den Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ auswirkt. Je größer einer dieser Werte, desto größer ist auch der maximale Levelunterschied zwischen Zeilen- und Spaltencluster eines unzulässigen Blocks. Dieser Effekt wird genauer in Abschnitt 3.4.2 analysiert.

3 Hierarchische Matrizen

Bemerkung 3.4.9 (Notwendigkeit). *Man sieht relativ schnell ein, dass der Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ nicht C_{sp} -schwachbesetzt — mit C_{sp} unabhängig von $\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$ beschränkt — sein kann, wenn $C_{U_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ und $C_{U_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ nicht unabhängig von $\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$ beschränkt sind, da für $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$*

$$U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) \subseteq \text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) \quad \text{sowie} \quad U_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) \subseteq \text{col}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s)$$

und damit

$$C_{U_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \leq \max_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} \# \text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) \quad \text{sowie} \quad C_{U_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \leq \max_{s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}} \# \text{col}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s)$$

gilt. Die Beschränktheit von $C_{U_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ und $C_{U_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ ist also ein notwendiges Kriterium für die Existenz einer Schwachbesetztheitskonstante von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Mit Kontraposition bedeutet dies, dass aus der Existenz einer Schwachbesetztheitskonstante von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ die Beschränktheit der Werte $C_{U_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ und $C_{U_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ folgt.

Für die abschließende Diskussion dieses Abschnitts verwenden wir für einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ die vereinfachenden Notationen aus Definition 3.4.1 und Definition 3.4.6. Kommt der transponierte Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$ in einigen Beweisen vor, werden wir auf die ausführlicheren Schreibweisen von row , col sowie der Mengen $U_1(\cdot, \cdot)$ und $U_2(\cdot, \cdot)$ ausweichen.

Wir werden nun zeigen, dass ein Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ genau dann C_{sp} -schwachbesetzt (mit einem konstanten $C_{\text{sp}} \in \mathbb{N}$) ist, wenn sich C_{U_1} und C_{U_2} sowie $C_{\text{sp}}^=$ unabhängig von $\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$ beschränkt lassen. Dieses Kriterium ist somit ein hinreichendes. Da wir in diesem Abschnitt davon ausgehen, dass $C_{\text{sp}}^=$ konstant ist (vgl. Bemerkung 3.4.4) bzw. sich dies für spezielle Anwendungen dieses Konzepts beweisen lässt, werden wir die Mengen $\text{row}^<(t)$ und $\text{row}^>(t)$ sowie $\text{col}^<(s)$ und $\text{col}^>(s)$ aus Definition 3.4.1 für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ durch Mengen ausdrücken, deren Elemente sich in einem geeigneten Sinne durch Levelgleichheit auszeichnen sowie durch $U_1(\cdot, \cdot)$ und $U_2(\cdot, \cdot)$ charakterisiert sind.

Lemma 3.4.10 (Darstellung von $\text{row}^<$ und $\text{col}^<$). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, dann gilt*

(a) *für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \setminus \{\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})\}$ mit $t^+ := \text{father}(t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$*

$$\text{row}^<(t) = \bigcup_{t^{++} \in \text{pred}(t)} \{s \in (\text{row}^=(t^{++}) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{J}}) \mid t^+ \in U_2(t^{++}, s)\}$$

und

(b) *für alle $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \setminus \{\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}})\}$ mit $s^+ := \text{father}(s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$*

$$\text{col}^<(s) = \bigcup_{s^{++} \in \text{pred}(s)} \{t \in (\text{col}^=(s^{++}) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{I}}) \mid s^+ \in U_1(t, s^{++})\}.$$

Beweis. (a) Sei $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \setminus \{\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})\}$ und $t^+ := \text{father}(t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$. Wir zeigen die Gleichheit der Mengen durch zwei Inklusionen.

„ \subseteq “: Es gelte o.B.d.A. $\text{row}^<(t) \neq \emptyset$. Sei $s \in \text{row}^<(t)$, dann gilt $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $\text{level}(s) < \text{level}(t)$. Damit gilt $(t, s) \neq \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}})$ und nach Lemma 3.2.8 über die rekursive Darstellung des Vaters

$$(t, s) \in \text{sons}((t^+, s)),$$

womit $(t^+, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ folgt. Mit Korollar 2.4.27 existiert nun ein $t^{++} \in \text{pred}(t^+)$ mit $\text{level}(s) = \text{level}(t^{++})$ — potentiell könnte auch $t^+ = t^{++}$ gelten — und nach Lemma 3.2.20 (b) gilt $(t^{++}, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, also insbesondere $s \in \text{row}^=(t^{++})$. Mit $t^+ \in \text{sons}^*(t^{++})$ folgt außerdem $t^+ \in U_2(t^{++}, s)$ und mit $\text{level}(t) > \text{level}(s)$ liefert Lemma 3.2.6 (c) $s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$, also die zu beweisende Inklusion.

„ \supseteq “: Auch hier sei die Menge auf der rechten Seite von (a) o.B.d.A. nicht leer. Sei

$$s \in \bigcup_{t^{++} \in \text{pred}(t)} \{s \in (\text{row}^=(t^{++}) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{J}}) \mid t^+ \in U_2(t^{++}, s)\},$$

dann existiert ein $t^{++} \in \text{pred}(t)$ mit $s \in (\text{row}^=(t^{++}) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{J}})$ und $t^+ \in U_2(t^{++}, s)$. Es folgt mit der Definition von $U_2(t^{++}, s)$, dass $(t^+, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie $t^+ \in \text{sons}^*(t^{++})$ gelten. Mit $\text{level}(s) = \text{level}(t^{++})$ bedeutet dies $\text{level}(s) \leq \text{level}(t^+)$. Aus $s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$ und $t^+ = \text{father}(t)$ folgt

$$(t, s) \in \text{sons}(t^+) \times \{s\} = \text{sons}((t^+, s)) \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$$

und $\text{level}(s) \leq \text{level}(t^+) < \text{level}(t^+) + 1 = \text{level}(t)$ liefert $s \in \text{row}^<(t)$. Zusammen mit „ \subseteq “ ergibt sich die zu zeigende Mengengleichheit.

(b) Sei $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \setminus \{\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}})\}$ und $s^+ := \text{father}(s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$. Nach Korollar 3.4.5 und Korollar 3.4.8 folgt mit Teil (a) dieses Lemmas

$$\begin{aligned} \text{col}^<(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) &= \text{row}^<(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, s) \\ &= \bigcup_{s^{++} \in \text{pred}(s)} \{t \in (\text{row}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, s^{++}) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{I}}) \mid s^+ \in U_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, (s^{++}, t))\} \\ &= \bigcup_{s^{++} \in \text{pred}(s)} \{t \in (\text{col}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s^{++}) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{I}}) \mid s^+ \in U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s^{++}))\}, \end{aligned}$$

also die Aussage. \square

Lemma 3.4.11 (Darstellung von $\text{row}^>$ und $\text{col}^>$). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, dann gilt*

(a) für alle $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$

$$\text{row}^>(t) = \bigcup_{s^{++} \in \text{row}^=(t)} \bigcup_{s^+ \in U_1(t, s^{++})} \text{sons}(s^+)$$

und

(b) für alle $s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$

$$\text{col}^>(s) = \bigcup_{t^{++} \in \text{col}^=(s)} \bigcup_{t^+ \in U_2(t^{++}, s)} \text{sons}(t^+).$$

3 Hierarchische Matrizen

Beweis. (a) Sei $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$. Wir zeigen die Mengengleichheit durch zwei Inklusionen.

„ \subseteq “: Es gelte o.B.d.A. $\text{row}^>(t) \neq \emptyset$. Sei $s \in \text{row}^>(t)$, dann gilt $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $\text{level}(s) > \text{level}(t)$. Insbesondere gilt damit $\text{level}(s) > 0$ und es folgt die Existenz eines Vaters $s^+ := \text{father}(s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$. Mit $(t, s) \neq (\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}), \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}})) = \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}})$, folgt mit der rekursiven Darstellung des Vaters (vgl. Lemma 3.2.8)

$$(t, s) \in \text{sons}((t, s^+)),$$

also $(t, s^+) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Des Weiteren existiert nach Korollar 2.4.27 ein $s^{++} \in \text{pred}(s^+)$ mit $\text{level}(s^{++}) = \text{level}(t)$ — potentiell könnte auch $s^+ = s^{++}$ gelten. Mit Lemma 3.2.20 (a) folgt $(t, s^{++}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Da $s^+ \in \text{sons}^*(s^{++})$ mit $(t, s^+) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gilt, folgt nach Definition 3.4.6 $s^+ \in U_1(t, s^{++})$. Für jedes $s \in \text{row}^>(t)$ existieren also $s^{++} \in \text{row}^=(t)$ und $s^+ \in U_1(t, s^{++})$ so, dass $s \in \text{sons}(s^+)$ gilt. Es folgt die zu beweisende Inklusion.

„ \supseteq “: Auch hier sei die Menge auf der rechten Seite von (a) o.B.d.A. nicht leer. Sei

$$s \in \bigcup_{s^{++} \in \text{row}^=(t)} \bigcup_{s^+ \in U_1(t, s^{++})} \text{sons}(s^+),$$

dann existieren $s^{++} \in \text{row}^=(t)$ und $s^+ \in U_1(t, s^{++})$ mit $s \in \text{sons}(s^+)$. Nach Definition von $U_1(t, s^{++})$ gilt $(t, s^+) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und mit $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ sowie $s^+ = \text{father}(s)$ folgt

$$(t, s) \in \{t\} \times \text{sons}(s^+) = \text{sons}((t, s^+)) \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}.$$

Aus $s^+ \in U_1(t, s^{++})$ folgt $s^+ \in \text{sons}^*(s^{++})$, also insbesondere

$$\text{level}(t) = \text{level}(s^{++}) \leq \text{level}(s^+) < \text{level}(s^+) + 1 = \text{level}(s)$$

und damit $s \in \text{row}^>(t)$.

(b) Sei nun $s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$, dann gilt nach Korollar 3.4.5, Korollar 3.4.8 und Teil (a) dieses Lemmas

$$\begin{aligned} \text{col}^>(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) &= \text{row}^>(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, s) \\ &= \bigcup_{t^{++} \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, s)} \bigcup_{t^+ \in U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, (s, t^{++}))} \text{sons}(t^+) \\ &= \bigcup_{t^{++} \in \text{col}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s)} \bigcup_{t^+ \in U_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t^{++}, s))} \text{sons}(t^+) \end{aligned}$$

und somit die Aussage. □

Bemerkung 3.4.12. Es seien die Voraussetzungen von Lemma 3.4.11 gegeben. Die dortige Forderung $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$ bedeutet keine Einschränkung, da nach Lemma 3.2.6 für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$

$$\text{row}^>(t) = \emptyset \quad \text{sowie} \quad \text{col}^>(s) = \emptyset$$

und damit

$$\# \text{row}^>(t) = 0 \quad \text{sowie} \quad \# \text{col}^>(s) = 0$$

gilt. Dieser Fall ist also für die Abschätzung der Mächtigkeiten nicht von Interesse.

Bemerkung 3.4.13 (Mengengleichheit). *Man beachte, dass in Lemma 3.4.10 und Lemma 3.4.11 eine Mengengleichheit steht. Es ist also möglich, für einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ die Mengen $\text{row}^<(t)$ und $\text{row}^>(t)$ wie auch $\text{col}^<(s)$ und $\text{col}^>(s)$ nur durch Mengen der Form $\text{row}^=(\tilde{t})$ und $\text{col}^=(\tilde{s})$, für geeignete $\tilde{t} \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\tilde{s} \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$, und die Mengen $U_1(\cdot, \cdot)$ sowie $U_2(\cdot, \cdot)$ aus Definition 3.4.6 auszudrücken. Die exakte Darstellung der Ausgangsmenge geht hierbei nicht verloren.*

Die letzten beiden Lemmata zeigen, dass wir für einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ die Mächtigkeiten von $\text{row}^<(t)$ und $\text{row}^>(t)$ sowie $\text{col}^<(s)$ und $\text{col}^>(s)$ für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ unter Kontrolle haben, sobald sich C_{U_1} und C_{U_2} sowie die Mengen $\text{row}^=(t)$ und $\text{col}^=(s)$ für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ gutartig verhalten.

Lemma 3.4.14 (Levelunterschied). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum.*

(a) *Seien $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $s \in \text{row}^=(t)$, dann gilt für alle $s^* \in U_1(t, s)$*

$$0 \leq \text{level}(s^*) - \text{level}(s) \leq C_{U_1} - 1.$$

(b) *Seien $s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$ und $t \in \text{col}^=(s)$, dann gilt für alle $t^* \in U_2(t, s)$*

$$0 \leq \text{level}(t^*) - \text{level}(t) \leq C_{U_2} - 1.$$

Beweis. (a) Sei $s^* \in U_1(t, s)$, dann gilt $s^* \in \text{sons}^*(s)$ und damit $\text{level}(s) \leq \text{level}(s^*)$, also

$$0 \leq \text{level}(s^*) - \text{level}(s).$$

Mit $s^* \in \text{sons}^*(s)$ existiert ein Pfad (s_0, \dots, s_ℓ) , $\ell \in \mathbb{N}_0$, von s nach s^* in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$. Aus $s^* \in U_1(t, s)$ folgt $(t, s^*) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und mit $s \in \text{row}^=(t)$ gilt

$$\text{level}(t) = \text{level}(s) \leq \text{level}(s_i)$$

für alle $i \in \{0, \dots, \ell\}$. Sei $i \in \{0, \dots, \ell\}$, dann gilt $s_i \in \text{pred}(s^*)$ (vgl. Korollar 2.4.18) und damit durch $\text{level}(t) \leq \text{level}(s_i)$ nach Lemma 3.2.20 (a) auch $(t, s_i) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie mit $s_i \in \text{sons}^*(s)$ insbesondere $s_i \in U_1(t, s)$. Es befinden sich also mindestens $(\ell + 1)$ Elemente in $U_1(t, s)$.

Mit $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $s \in \text{row}^=(t)$ folgt nach Definition 3.4.6

$$\#U_1(t, s) \leq C_{U_1}$$

und somit nach obiger Überlegung

$$\ell + 1 \leq \#U_1(t, s) \leq C_{U_1},$$

also unter Verwendung von Korollar 2.4.25

$$\text{level}(s^*) - \text{level}(s) = \text{level}(s_\ell) - \text{level}(s_0) = \ell \leq C_{U_1} - 1.$$

3 Hierarchische Matrizen

(b) Sei $t^* \in U_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s))$. Es gilt nach Korollar 3.4.5

$$t \in \text{col}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) = \text{row}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, s)$$

und nach Korollar 3.4.8

$$t^* \in U_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) = U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, (s, t)).$$

Mit Teil (a) dieses Lemmas und Korollar 3.4.8 folgt dann

$$0 \leq \text{level}(t^*) - \text{level}(t) \leq C_{U_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T} - 1 = C_{U_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} - 1,$$

also die Aussage. \square

Dank der Aussagen aus Lemma 3.4.10, Lemma 3.4.11 und Lemma 3.4.14 lässt sich nun die Existenz einer Schwachbesetztheitskonstante für einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ auf die Größen $C_{\text{sp}}^=$, C_{U_1} sowie C_{U_2} zurückführen.

Satz 3.4.15 (Schwachbesetztheit). *Es sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum sowie*

$$C_{\text{sons}} := \max_{r \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \cup \mathcal{T}_{\mathcal{J}}} \# \text{sons}(r),$$

dann ist $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ C_{sp} -schwachbesetzt mit

$$C_{\text{sp}} \leq C_{\text{sp}}^=(C_{\text{sons}}(C_{U_1} + C_{U_2}) + 1).$$

Beweis. Wir befassen uns zuerst mit der Blockzeile. Sei dazu $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, dann gilt

$$\text{row}(t) = \text{row}^=(t) \dot{\cup} \text{row}^<(t) \dot{\cup} \text{row}^>(t).$$

Wir schätzen nun die Mächtigkeiten von $\text{row}^<(t)$ und $\text{row}^>(t)$ separat ab.

Es gelte o.B.d.A. $\text{row}^<(t) \neq \emptyset$, damit also insbesondere $\text{level}(t) > 0$, womit $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \setminus \{\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})\}$ folgt. Es existiert also ein Vater $t^+ := \text{father}(t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ von t . Sei $s \in \text{row}^<(t)$, dann gilt $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und nach Lemma 3.4.10 (a) folgt

$$s \in \bigcup_{t^{++} \in \text{pred}(t)} \{s \in (\text{row}^=(t^{++}) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{J}}) \mid t^+ \in U_2(t^{++}, s)\}.$$

Also gilt $s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$ und es existiert $t^{++} \in \text{pred}(t)$ mit $s \in \text{row}^=(t^{++})$ sowie $t^+ \in U_2(t^{++}, s)$. Aus $s \in \text{row}^=(t^{++})$ folgt $t^{++} \in \text{col}^=(s)$. Lemma 3.4.14 (b) liefert nun

$$0 \leq \text{level}(t^+) - \text{level}(t^{++}) \leq C_{U_2} - 1$$

und mit $(\text{row}^=(t^{++}) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{J}}) \subseteq \text{row}^=(t^{++})$ bedeutet dies

$$\text{row}^<(t) \subseteq \bigcup_{\substack{t^{++} \in \text{pred}(t^+) \\ 0 \leq \text{level}(t^+) - \text{level}(t^{++}) \leq C_{U_2} - 1}} \text{row}^=(t^{++}).$$

Da auf jeder Stufe nur ein Vorfahre von t^+ existiert (vgl. Korollar 2.4.18), folgt damit

$$\begin{aligned}
\# \text{row}^<(t) &\leq \sum_{\substack{t^{++} \in \text{pred}(t^+) \\ 0 \leq \text{level}(t^+) - \text{level}(t^{++}) \leq C_{U_2} - 1}} \# \text{row}^=(t^{++}) \\
&\leq \sum_{\substack{t^{++} \in \text{pred}(t^+) \\ 0 \leq \text{level}(t^+) - \text{level}(t^{++}) \leq C_{U_2} - 1}} C_{\text{sp}}^= \\
&= \sum_{\ell = \text{level}(t^+) - (C_{U_2} - 1)}^{\text{level}(t^+)} C_{\text{sp}}^= \\
&= C_{\text{sp}}^= (\text{level}(t^+) - \text{level}(t^+) + C_{U_2} - 1 + 1) = C_{\text{sp}}^= C_{U_2}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Sei nun auch o.B.d.A. $\text{row}^>(t) \neq \emptyset$ vorausgesetzt, dann gilt nach Lemma 3.2.6 (b) $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$. Sei $s \in \text{row}^>(t)$, dann folgt mit Lemma 3.4.11 (a)

$$s \in \bigcup_{s^{++} \in \text{row}^=(t)} \bigcup_{s^+ \in U_1(t, s^{++})} \text{sons}(s^+).$$

Da $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ gilt, folgt nach Definition 3.4.6 für alle $s^{++} \in \text{row}^=(t)$

$$\# U_1(t, s^{++}) \leq C_{U_1}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
\# \text{row}^>(t) &\leq \sum_{s^{++} \in \text{row}^=(t)} \sum_{s^+ \in U_1(t, s^{++})} \# \text{sons}(s^+) \leq \sum_{s^{++} \in \text{row}^=(t)} \sum_{s^+ \in U_1(t, s^{++})} C_{\text{sons}} \\
&\leq \sum_{s^{++} \in \text{row}^=(t)} C_{U_1} C_{\text{sons}} \leq C_{\text{sp}}^= C_{U_1} C_{\text{sons}}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
\# \text{row}(t) &\leq \# \text{row}^=(t) + \# \text{row}^<(t) + \# \text{row}^>(t) \\
&\leq C_{\text{sp}}^= + C_{\text{sp}}^= C_{U_2} + C_{\text{sp}}^= C_{U_1} C_{\text{sons}} = C_{\text{sp}}^= (C_{U_1} C_{\text{sons}} + C_{U_2} + 1).
\end{aligned}$$

Wir untersuchen nun die Blockspalte und verwenden dazu den transponierten Blockbaum. Sei $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, dann gilt analog

$$\text{col}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) = \text{col}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) \dot{\cup} \text{col}^<(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) \dot{\cup} \text{col}^>(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s).$$

Aus Korollar 3.4.5 folgen die drei Mengengleichheiten $\text{col}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) = \text{row}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, s)$, $\text{col}^<(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) = \text{row}^<(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, s)$ und $\text{col}^>(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) = \text{row}^>(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, s)$. Mit Korollar 3.4.8 ergibt sich dann analog zu (3.21)

$$\# \text{col}^<(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) = \# \text{row}^<(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, s) \leq C_{\text{sp}}^= C_{U_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T} = C_{\text{sp}}^= C_{U_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$$

3 Hierarchische Matrizen

und analog zu (3.22)

$$\# \text{col}^>(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s) = \# \text{row}^>(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, s) \leq C_{\text{sp}}^- C_{U_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T} C_{\text{sons}} = C_{\text{sp}}^- C_{U_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} C_{\text{sons}}.$$

Insgesamt also — wieder mit der vereinfachenden Schreibweisen für $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ — die Abschätzung

$$\begin{aligned} \# \text{col}(s) &\leq \# \text{col}^=(s) + \# \text{col}^<(s) + \# \text{col}^>(s) \\ &\leq C_{\text{sp}}^- + C_{\text{sp}}^- C_{U_1} + C_{\text{sp}}^- C_{U_2} C_{\text{sons}} \\ &= C_{\text{sp}}^- (C_{U_1} + C_{U_2} C_{\text{sons}} + 1). \end{aligned}$$

Für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ gilt dann

$$\max\{\# \text{row}(t), \# \text{col}(s)\} \leq C_{\text{sp}}^- (C_{\text{sons}}(C_{U_1} + C_{U_2}) + 1)$$

und damit die Aussage. □

Bemerkung 3.4.16 (Spezialfälle). *Es seien die Voraussetzungen von Satz 3.4.15 gegeben, dann gilt die Abschätzung für C_{sp} auch, falls*

$$\begin{aligned} \text{row}^=(t) &= \emptyset \text{ für alle } t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \\ \text{und } \text{col}^=(s) &= \emptyset \text{ für alle } s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}} \end{aligned} \tag{3.23}$$

gilt, da dann wie in Bemerkung 3.4.7 erwähnt

$$\text{row}^<(t) = \text{row}^>(t) = \text{col}^<(s) = \text{col}^>(s) = \emptyset \text{ für alle } t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \text{ und } s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$$

folgt. Mit der Definition $C_{U_1} = 0 = C_{U_2}$ bedeutet dies also

$$C_{\text{sp}} \leq C_{\text{sp}}^-.$$

Die Aussage des Satzes 3.4.15 gilt insbesondere auch dann, wenn nur einer der beiden Fälle in (3.23) auftritt.

Bemerkung 3.4.17 (Notwendig und hinreichend). *Es seien die Voraussetzungen von Satz 3.4.15 gegeben, dann liefert die dortige Aussage zusammen mit Bemerkung 3.4.9 die Abschätzungen*

$$\max\{C_{U_1}, C_{U_2}\} \leq C_{\text{sp}} \leq C_{\text{sp}}^- (C_{\text{sons}}(C_{U_1} + C_{U_2}) + 1).$$

Die Beschränktheit von C_{U_1} und C_{U_2} unabhängig von $\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$ ist also sowohl notwendiges als auch — C_{sp}^- als konstant vorausgesetzt — hinreichendes Kriterium für die Existenz einer Schwachbesetztheitskonstante von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.

3.4.2 Spezielles Konzept

Um die Existenz einer Schwachbesetztheitskonstante eines Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ zu zeigen, müssen nach dem vorherigen Abschnitt C_{U_1} und C_{U_2} aus Definition 3.4.6 unabhängig von $\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$ beschränkt sein. Da die Mengen $U_1(\cdot, \cdot)$ und $U_2(\cdot, \cdot)$ für das allgemeine Konzept allerdings sehr abstrakt formuliert sind, ist eine nähere Untersuchung angebracht, um ein in der Anwendung eventuell leichter nachweisbares Kriterium zu erhalten. In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass eine Schranke für den Levelunterschied zwischen zwei Clustern $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$, die zusammen einen unzulässigen Block bilden und von denen einer ein Blatt ist, ein hinreichendes Kriterium hierfür darstellt. Die Notwendigkeit dieser Schranke für den Levelunterschied ist mit Lemma 3.4.14 bereits bewiesen.

Definition 3.4.18 (Levelunterschied). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, dann definieren wir für alle $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$*

$$\begin{aligned} L_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) &:= \max_{s^* \in U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s))} \text{level}(s^*) - \text{level}(t) \\ \text{und } L_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) &:= \max_{t^* \in U_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s))} \text{level}(t^*) - \text{level}(s) \end{aligned} \quad (3.24)$$

sowie

$$\begin{aligned} C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} &:= \max_{\substack{t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \\ s \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t)}} L_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) \\ \text{und } C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} &:= \max_{\substack{s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}} \\ t \in \text{col}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s)}} L_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Analog zu Definition 3.4.6 schreiben wir

$$\begin{aligned} L_1(t, s) &\text{ anstatt } L_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) \\ \text{und } L_2(t, s) &\text{ anstatt } L_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) \end{aligned}$$

für alle $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie

$$\begin{aligned} C_{L_1} &\text{ anstatt } C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \\ \text{und } C_{L_2} &\text{ anstatt } C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}, \end{aligned}$$

wenn keine Mehrdeutigkeit im Bezug auf den Blockbaum vorliegt.

Bemerkung 3.4.19 (Spezialfälle). *In Analogie zu Bemerkung 3.4.7 könnte auch hier für einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ der Fall auftreten, dass sowohl für die Werte $L_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (\cdot, \cdot))$ oder $L_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (\cdot, \cdot))$ aus (3.24), als auch für $C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ oder $C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ aus (3.25) das Maximum über die leere Menge gebildet wird. Für ein $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $\#U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) = 1$ folgt*

$$U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) = \{s\}$$

und damit

$$L_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) = 0.$$

3 Hierarchische Matrizen

Analog folgt dies auch für $L_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (\cdot, \cdot))$. Aus diesem Grund setzen wir für $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$

$$\begin{aligned} L_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) &:= -1, \quad \text{falls } U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) = \emptyset \\ \text{und } L_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) &:= -1, \quad \text{falls } U_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) = \emptyset \end{aligned}$$

gilt sowie analog

$$\begin{aligned} C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} &:= -1, \quad \text{falls } \text{row}^-(t) = \emptyset \text{ für alle } t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \\ \text{und } C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} &:= -1, \quad \text{falls } \text{col}^-(s) = \emptyset \text{ für alle } s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}} \end{aligned}$$

gilt.

Im Zusammenhang mit dem transponierten Blockbaum stellen sich die in Definition 3.4.18 eingeführten Werte wie folgt dar.

Korollar 3.4.20 (Transponierter Blockbaum). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, dann gilt für alle $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$*

$$L_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) = L_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, (s, t)) \quad \text{und} \quad C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} = C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T}$$

sowie

$$L_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) = L_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, (s, t)) \quad \text{und} \quad C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} = C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T}.$$

Beweis. Sei $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, dann gilt nach Korollar 3.4.8

$$\begin{aligned} L_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) &= \max_{t^* \in U_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s))} \text{level}(t^*) - \text{level}(s) \\ &= \max_{t^* \in U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, (s, t))} \text{level}(t^*) - \text{level}(s) = L_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, (s, t)). \end{aligned}$$

Mit dieser Gleichheit und Korollar 3.4.5 folgt

$$C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} = \max_{\substack{s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}} \\ t \in \text{col}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, s)}} L_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) = \max_{\substack{s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}} \\ t \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, s)}} L_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, (s, t)) = C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T}.$$

Da $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ der zu $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$ transponierte Blockbaum ist, folgen mit obiger Aussage und $(s, t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$

$$L_2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T, (s, t)) = L_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t, s)) \quad \text{und} \quad C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T} = C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}},$$

also die Aussage des Korollars. \square

Wir verwenden für den abschließenden Teil dieses Unterkapitels die vereinfachenden Notationen aus Definition 3.4.18 für einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Bei der Anwendung des transponierten Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$ werden wir für eine deutlichere Unterscheidung auf die ausführlicheren Schreibweisen zurückgreifen.

C_{L_1} und C_{L_2} beschreiben den maximalen *Levelunterschied* zwischen Zeilen- und Spaltencluster eines unzulässigen Blocks des Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Folgendes Lemma zeigt, dass sich hierdurch eine obere und untere Schranke für C_{U_1} sowie C_{U_2} formulieren lässt.

Lemma 3.4.21. Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum sowie $C_{\text{sons}} := \max_{r \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \cup \mathcal{T}_{\mathcal{J}}} \# \text{sons}(r) \geq 2$, dann gelten die Abschätzungen

$$C_{L_1} + 1 \leq C_{U_1} \leq 2C_{\text{sons}}^{C_{L_1}} \quad \text{und} \quad C_{L_2} + 1 \leq C_{U_2} \leq 2C_{\text{sons}}^{C_{L_2}}.$$

Beweis. Nach Lemma 3.4.14 (a) gilt für alle $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $s \in \text{row}^-(t)$ sowie $s^* \in U_1(t, s)$ die Abschätzung

$$0 \leq \text{level}(s^*) - \text{level}(s) \leq C_{U_1} - 1.$$

Mit $\text{level}(t) = \text{level}(s)$ folgt dann $C_{L_1} \leq C_{U_1} - 1$ und damit

$$C_{L_1} + 1 \leq C_{U_1}.$$

Seien $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $s \in \text{row}^-(t)$. Wir definieren für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ die Mengen

$$U_1^{(\ell)}(t, s) := \{s^* \in U_1(t, s) \mid \text{level}(s^*) - \text{level}(s) = \ell\}.$$

Für alle $s^* \in U_1(t, s)$ gilt $s^* \in \text{sons}^*(s)$, womit ein Pfad (s_0, \dots, s_ℓ) , $\ell \in \mathbb{N}_0$, von s nach s^* in $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ existiert. Mit $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $s \in \text{row}^-(t)$ folgt aufgrund der Definition von C_{L_1} sowie Korollar 2.4.25

$$0 \leq \ell = \text{level}(s_\ell) - \text{level}(s_0) = \text{level}(s^*) - \text{level}(s) = \text{level}(s^*) - \text{level}(t) \leq C_{L_1},$$

also

$$U_1(t, s) \subseteq \bigcup_{0 \leq \ell \leq C_{L_1}} U_1^{(\ell)}(t, s). \quad (3.26)$$

Um die Mächtigkeit von $U_1(t, s)$ und damit C_{U_1} abzuschätzen, beschränken wir die Mächtigkeiten der $U_1^{(\ell)}(t, s)$ für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ induktiv durch C_{sons}^ℓ .

Für $\ell = 0$ gilt $U_1^{(0)}(t, s) \subseteq \{s\}$ und somit $\#U_1^{(0)}(t, s) \leq 1 = C_{\text{sons}}^0$. Es sei nun $\ell \in \mathbb{N}_0$ so gegeben, dass $\#U_1^{(\ell)}(t, s) \leq C_{\text{sons}}^\ell$ gilt.

Für $s^* \in U_1^{(\ell+1)}(t, s)$ gilt nach Definition $s^* \in U_1(t, s)$ mit $\text{level}(s^*) - \text{level}(s) = \ell + 1 > 0$. Aus $s^* \in U_1(t, s)$ folgt $(t, s^*) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $s \in \text{row}^-(t)$ liefert $\text{level}(t) < \text{level}(s^*)$. Es muss also $(t, s^*) \neq \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}})$ gelten und mit der rekursiven Darstellung des Vaters (vgl. Lemma 3.2.8) folgt $(t, s^*) \in \text{sons}((t, s^+))$ mit $s^+ := \text{father}(s^*) \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$. Insbesondere gilt damit $(t, s^+) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ — da dieser Block Söhne besitzt — und

$$\text{level}(s^+) - \text{level}(s) = \text{level}(s^*) - 1 - \text{level}(s) = \ell + 1 - 1 = \ell.$$

Aus $s^* \in U_1(t, s)$ und $\text{level}(s^*) > \text{level}(s)$ folgt $s^* \in \text{sons}^*(s) \setminus \{s\}$, also nach Korollar 2.4.21 (b) $s^+ = \text{father}(s^*) \in \text{sons}^*(s)$ und damit $s^+ \in U_1^{(\ell)}(t, s)$. Insgesamt ergibt sich

$$U_1^{(\ell+1)}(t, s) = \bigcup_{s^+ \in U_1^{(\ell)}(t, s)} \text{sons}(s^+)$$

und damit nach Induktionsvoraussetzung

$$\#U_1^{(\ell+1)}(t, s) \leq \# \bigcup_{s^+ \in U_1^{(\ell)}(t, s)} \text{sons}(s^+) \leq C_{\text{sons}} \#U_1^{(\ell)}(t, s) \leq C_{\text{sons}}^{\ell+1}.$$

3 Hierarchische Matrizen

Aus (3.26) und der Voraussetzung $C_{\text{sons}} \geq 2$ folgt mit der geometrischen Reihe

$$\#U_1(t, s) \leq \# \bigcup_{0 \leq \ell \leq C_{L_1}} U_1^{(\ell)}(t, s) \leq \sum_{\ell=0}^{C_{L_1}} C_{\text{sons}}^\ell = C_{\text{sons}}^{C_{L_1}} \sum_{\ell=0}^{C_{L_1}} C_{\text{sons}}^{-\ell} \leq 2C_{\text{sons}}^{C_{L_1}},$$

womit dann auch $C_{U_1} \leq 2C_{\text{sons}}^{C_{L_1}}$ gilt.

Mit der oben bewiesenen Abschätzung, angewendet auf den transponierten Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T$, folgt

$$C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T} + 1 \leq C_{U_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T} \leq 2C_{\text{sons}}^{C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^T}}.$$

Korollar 3.4.8 und Korollar 3.4.20 liefern

$$C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} + 1 \leq C_{U_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \leq 2C_{\text{sons}}^{C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}},$$

womit die Aussage folgt. \square

Bemerkung 3.4.22 (Spezialfälle). *Es seien die Voraussetzungen von Lemma 3.4.21 gegeben, dann folgen die dortigen Abschätzungen auch, falls in Definition 3.4.18 ein Maximum über die leere Menge gebildet wird. Gilt beispielsweise*

$$\text{row}^-(t) = \emptyset \text{ für alle } t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}},$$

so folgt mit Bemerkung 3.4.7 und Bemerkung 3.4.19 sowie $C_{\text{sons}} \geq 2 > 0$

$$C_{L_1} + 1 = -1 + 1 = 0 = C_{U_1} \leq 2C_{\text{sons}}^{-1} = 2C_{\text{sons}}^{C_{L_1}}.$$

Analog folgt diese Aussage für C_{L_2} und C_{U_2} sowie für den Fall, dass $U_1(t, s) = \emptyset$ oder $U_2(t, s) = \emptyset$ für alle $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gilt. Damit behält Lemma 3.4.21 auch in diesen Spezialfällen seine Gültigkeit.

Korollar 3.4.23 (Schwachbesetztheit). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum sowie*

$$C_{\text{sons}} := \max_{r \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \cup \mathcal{T}_{\mathcal{J}}} \# \text{sons}(r) \geq 2,$$

dann ist $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ C_{sp} -schwachbesetzt mit

$$C_{\text{sp}} \leq C_{\text{sp}}^{\overline{=}} \left(2 \left(C_{\text{sons}}^{C_{L_1}+1} + C_{\text{sons}}^{C_{L_2}+1} \right) + 1 \right).$$

Beweis. Nach Satz 3.4.15 gilt

$$C_{\text{sp}} \leq C_{\text{sp}}^{\overline{=}} (C_{\text{sons}}(C_{U_1} + C_{U_2}) + 1) \tag{3.27}$$

und mit Lemma 3.4.21 folgt

$$C_{\text{sp}} \leq C_{\text{sp}}^{\overline{=}} \left(C_{\text{sons}} \left(2C_{\text{sons}}^{C_{L_1}} + 2C_{\text{sons}}^{C_{L_2}} \right) + 1 \right) = C_{\text{sp}}^{\overline{=}} \left(2 \left(C_{\text{sons}}^{C_{L_1}+1} + C_{\text{sons}}^{C_{L_2}+1} \right) + 1 \right).$$

\square

Bemerkung 3.4.24 (Notwendig und hinreichend). *Es gelten die Voraussetzungen von Korollar 3.4.23, dann liefern Lemma 3.4.21 und Korollar 3.4.23 zusammen mit Bemerkung 3.4.17 die Abschätzungen*

$$\max \{C_{L_1} + 1, C_{L_2} + 1\} \leq C_{\text{sp}} \leq C_{\text{sp}}^{\leftarrow} \left(2 \left(C_{\text{sons}}^{C_{L_1}+1} + C_{\text{sons}}^{C_{L_2}+1} \right) + 1 \right).$$

Die Beschränktheit von C_{L_1} und C_{L_2} unabhängig von $\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$ ist damit also in Analogie zu Bemerkung 3.4.17 sowohl notwendiges als auch — $C_{\text{sp}}^{\leftarrow}$ als konstant vorausgesetzt — hinreichendes Kriterium für die Existenz einer Schwachbesetztheitskonstante von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

Dieses Kapitel dient der Herleitung sowie Analyse des *Matrix-Galerkin-Verfahrens*. Hierzu betrachten wir exemplarisch die lineare Matrixgleichung

$$AXB^* = C \quad (4.1)$$

mit $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$, $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$, rechter Seite $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und gesuchter Lösung $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, wobei \mathcal{I} sowie \mathcal{J} endliche Indexmengen seien. An entsprechender Stelle wird angegeben, wie sich die Diskussion auf allgemeine lineare Matrixgleichungen der Form

$$\sum_{i=1}^N A_i X B_i^* = C \quad (4.2)$$

mit $N \in \mathbb{N}$ sowie $A_i \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B_i \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ erweitern lässt.

In typischen Anwendungen ist die zu berechnende Lösung X vollbesetzt. Als Beispiel ließe sich hier die Berechnung der Inversen einer regulären — z. B. aus der Diskretisierung eines partiellen Differentialoperators stammenden — Matrix $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ nennen (vgl. Kapitel 1). In diesem Fall wäre die Gleichung

$$AX = I$$

zu lösen. Selbst wenn die Matrix A schwachbesetzt ist, gilt dies i.A. nicht für A^{-1} . Somit bedeutet allein das Setzen aller Einträge von X — vernachlässigt man die konkrete Berechnung dieser — einen Aufwand von mindestens $\#\mathcal{I}\#\mathcal{J}$ Operationen. Ein geringerer Aufwand lässt sich in diesem Fall potentiell also nur gewährleisten, wenn die Lösung X durch eine Approximation $\tilde{X} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ersetzt wird. Das Ziel ist es nun, einen Ansatz zu präsentieren, der genau so eine Approximation mit einem in $\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$ asymptotisch linearen Aufwand berechnet. Hierzu bedienen wir uns der in Kapitel 3 eingeführten \mathcal{H}^2 -Matrizen und verwenden zur Herleitung die in Abschnitt 2.3 diskutierte Technik der Variationsformulierung.

4.1 Variationsformulierung

Ebenso wie in Abschnitt 2.3 wird hier zwischen der kontinuierlichen und der Galerkin-Variationsformulierung unterschieden. Obwohl beiden Formulierungen ein endlich-dimensionaler Raum zugrundeliegt, wird das Attribut „kontinuierlich“ verwendet, um die strukturelle Nähe zu besagtem Abschnitt zu verdeutlichen.

Kontinuierliche Variationsformulierung

Um die in Abschnitt 2.3 vorgestellten Techniken und die dort angegebenen Aussagen anwenden zu können, muss die Gleichung (4.1) in eine Variationsformulierung überführt werden. Nach Lemma 2.1.13 ist $V := (\mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$ ein Hilbertraum, womit der Riesz'sche Darstellungssatz die isometrische Isomorphie von V zu seinem Dualraum V' liefert (siehe z.B. [20, Satz 2.25]). Wir finden also für alle $f \in V'$ eine Matrix $F \in V$ so, dass

$$\langle f, X \rangle = \langle F, X \rangle_F \quad \text{für alle } X \in V$$

gilt, und jede Matrix $F \in V$ definiert auf diese Weise — also über die Verwendung von $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ — ein Element des Dualraums V' . Aus diesem Grund ersetzen wir die duale Paarung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ durch das Frobenius-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$. Des Weiteren schreiben wir im Folgenden für $V = (\mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$ auch vereinfachend nur $\mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.

Für die Bestimmung einer Lösung $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ von (4.1) definieren wir die Bilinearform

$$a : \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto \langle AXB^*, Y \rangle_F \quad (4.3)$$

— die eine Bilinearform definierenden Eigenschaften lassen sich direkt nachrechnen — und gelangen so zu der Variationsformulierung

$$a(X, Y) = \langle C, Y \rangle_F \quad \text{für alle } Y \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}.$$

Eine im Folgenden für die Lösbarkeit dieser Formulierung charakteristische Eigenschaft der Bilinearform aus (4.3) liefert das nachstehende Lemma.

Lemma 4.1.1 (Charakterisierung der Bilinearform). *Seien \mathcal{I} und \mathcal{J} endliche Indexmengen sowie $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ symmetrische Matrizen, dann ist die Bilinearform*

$$a : \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto \langle AXB^*, Y \rangle_F$$

ebenfalls symmetrisch und mit

$$\begin{aligned} \alpha &:= \min\{\lambda\mu \mid \lambda \in \sigma(A) \text{ und } \mu \in \sigma(B)\} \\ \text{sowie } \beta &:= \max\{\lambda\mu \mid \lambda \in \sigma(A) \text{ und } \mu \in \sigma(B)\} \end{aligned}$$

folgt

$$\alpha \|X\|_F^2 \leq a(X, X) \leq \beta \|X\|_F^2 \quad \text{für alle } X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}. \quad (4.4)$$

Beweis. Da A und B symmetrisch sind, gilt dies nach Lemma 2.2.4 (a) auch für $B \otimes A$. Mit Lemma 2.2.4 (b) und Lemma 2.2.5 folgt dann für alle $X, Y \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$

$$\begin{aligned} a(X, Y) &= \langle AXB^*, Y \rangle_F = \langle (B \otimes A) \text{vec}(X), \text{vec}(Y) \rangle_2 \\ &= \langle \text{vec}(X), (B \otimes A) \text{vec}(Y) \rangle_2 = \langle X, AYB^* \rangle_F \\ &= \langle AYB^*, X \rangle_F = a(Y, X) \end{aligned}$$

und somit die Symmetrie der Bilinearform. Des Weiteren folgt nach Lemma 2.2.4 (c)

$$\sigma(B \otimes A) = \{\lambda\mu \mid \lambda \in \sigma(A) \text{ und } \mu \in \sigma(B)\}$$

und damit

$$\alpha = \min\{\Lambda \mid \Lambda \in \sigma(B \otimes A)\} \quad \text{sowie} \quad \beta = \max\{\Lambda \mid \Lambda \in \sigma(B \otimes A)\}.$$

Für alle $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ folgen nach Lemma 2.1.5 (b) die Abschätzungen

$$\alpha \|\text{vec}(X)\|_2^2 \leq \langle (B \otimes A) \text{vec}(X), \text{vec}(X) \rangle_2 \leq \beta \|\text{vec}(X)\|_2^2,$$

also nach Lemma 2.2.4 (b) sowie Lemma 2.2.5

$$\alpha \|X\|_F^2 \leq \langle AXB^*, X \rangle_F \leq \beta \|X\|_F^2$$

und mit der Definition der Bilinearform die zu beweisende Aussage

$$\alpha \|X\|_F^2 \leq a(X, X) \leq \beta \|X\|_F^2 \quad \text{für alle } X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}.$$

□

In Lemma 4.1.1 ist zu beachten, dass aufgrund der Symmetrie der Matrizen $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ für deren Spektren

$$\sigma(A) \subseteq \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \sigma(B) \subseteq \mathbb{R}$$

gilt (siehe Lemma 2.1.5 (a)), womit wir sowohl das Minimum als auch das Maximum über die dortigen Mengen bilden dürfen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ folgt.

Wir werden nun zeigen, dass eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, welche eine Ungleichungskette der Form (4.4) mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha > 0$ erfüllt, hinreichend ist, um Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der Variationsformulierung zu gewährleisten.

Lemma 4.1.2 (Eindeutige Lösbarkeit). *Seien \mathcal{I} und \mathcal{J} endliche Indermengen sowie $a : \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Seien weiter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$ so gegeben, dass*

$$\alpha \|X\|_F^2 \leq a(X, X) \leq \beta \|X\|_F^2 \quad \text{für alle } X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \quad (4.5)$$

gilt, dann besitzt die Variationsformulierung

$$a(X, Y) = \langle C, Y \rangle_F \quad \text{für alle } Y \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$$

für alle $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ eine eindeutige Lösung $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Zusätzlich gilt

$$\|X\|_F \leq \frac{1}{\alpha} \|C\|_F.$$

Beweis. Mit $C_k := \alpha > 0$ folgt nach (4.5) insbesondere $C_s := \beta > 0$ sowie die C_k -Koerzitivität der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$. Damit gilt insbesondere $a(X, X) > 0$ für alle $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \{0\}$, womit $a(\cdot, \cdot)$ aufgrund der Symmetrie ein Skalarprodukt definiert. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (siehe z.B. [20, Lemma 2.21]) zusammen mit (4.5) liefert

$$|a(X, Y)| \leq a(X, X)^{\frac{1}{2}} a(Y, Y)^{\frac{1}{2}} \leq \beta^{\frac{1}{2}} \|X\|_F \beta^{\frac{1}{2}} \|Y\|_F = C_s \|X\|_F \|Y\|_F,$$

also die C_s -Stetigkeit von $a(\cdot, \cdot)$. Die Aussage folgt nun mit dem Lemma von Lax-Milgram (siehe Lemma 2.3.2). □

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

Für die Matrixgleichung (4.1) folgen nach Lemma 4.1.2 somit Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung, wenn

$$\min\{\lambda\mu \mid \lambda \in \sigma(A) \text{ und } \mu \in \sigma(B)\} > 0$$

gilt (vgl. Lemma 4.1.1). In der nachstehenden Bemerkung werden wir den allgemeineren Fall einer Matrixgleichung der Form (4.2) auf die oben bewiesenen Aussagen zurückführen.

Bemerkung 4.1.3 (Allgemeine lineare Matrixgleichung). *Seien \mathcal{I} und \mathcal{J} endliche Indexmengen, $N \in \mathbb{N}$ sowie $A_i \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B_i \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ symmetrische Matrizen. Wir betrachten eine allgemeine lineare Matrixgleichung der Form*

$$\sum_{i=1}^N A_i X B_i^* = C \quad (4.6)$$

zu einer gegebenen rechten Seite $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und gesuchter Lösung $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.

Für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ definieren wir die Bilinearform

$$a_i : \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto \langle A_i X B_i^*, Y \rangle_F$$

sowie

$$\begin{aligned} \alpha_i &:= \min\{\lambda\mu \mid \lambda \in \sigma(A_i) \text{ und } \mu \in \sigma(B_i)\} \\ \text{und } \beta_i &:= \max\{\lambda\mu \mid \lambda \in \sigma(A_i) \text{ und } \mu \in \sigma(B_i)\}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 4.1.1 folgt dann für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ die Symmetrie der Bilinearform $a_i(\cdot, \cdot)$ sowie die Abschätzungen

$$\alpha_i \|X\|_F^2 \leq a_i(X, X) \leq \beta_i \|X\|_F^2 \quad \text{für alle } X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}. \quad (4.7)$$

Die Variationsformulierung von (4.6) lautet nun

$$a(X, Y) = \langle C, Y \rangle_F \quad \text{für alle } Y \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$$

mit

$$a : \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto \sum_{i=1}^N \langle A_i X B_i^*, Y \rangle_F = \sum_{i=1}^N a_i(X, Y).$$

Wir setzen

$$\alpha := \sum_{i=1}^N \alpha_i \quad \text{und} \quad \beta := \sum_{i=1}^N \beta_i,$$

dann gelten für alle $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit Gleichung (4.7) die Abschätzungen

$$\alpha \|X\|_F^2 = \sum_{i=1}^N \alpha_i \|X\|_F^2 \leq \sum_{i=1}^N a_i(X, X) = a(X, X)$$

und

$$a(X, X) = \sum_{i=1}^N a_i(X, X) \leq \sum_{i=1}^N \beta_i \|X\|_F^2 = \beta \|X\|_F^2.$$

Gilt nun $\alpha > 0$, dann folgen nach Lemma 4.1.2 Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ von (4.6) sowie die Stabilitätsabschätzung

$$\|X\|_F \leq \frac{1}{\alpha} \|C\|_F.$$

Galerkin-Variationsformulierung

Im vorherigen Abschnitt wurde für eine gegebene lineare Matrixgleichung mit der dort angegebenen Struktur die kontinuierliche Variationsformulierung hergeleitet und es wurden Aussagen über deren Lösbarkeit bewiesen. Wir betrachten nun — wieder mit zwei endlichen Indexmengen \mathcal{I} und \mathcal{J} — eine allgemeine Variationsformulierung der Form

$$a(X, Y) = \langle C, Y \rangle_F \quad \text{für alle } Y \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}. \quad (4.8)$$

Die Matrix $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sei hier wieder die zu berechnende Lösung, $a : \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform und $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ eine vorgegebene rechte Seite. Die konkrete Struktur der zugrundeliegenden Matrixgleichung ist für die folgenden Betrachtungen unerheblich, womit die Diskussion auf die beiden vorher untersuchten Gleichungen anwendbar ist. Wie eingangs dieses Kapitels motiviert, sind wir an einer Approximation $\tilde{X} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ der Lösung interessiert und verwenden für die Darstellung dieser Approximation eine \mathcal{H}^2 -Matrix. Seien dazu $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum sowie $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ zwei geschachtelt Clusterbasen. Zur vereinfachten Schreibweise setzen wir

$$\mathcal{M} := \mathcal{H}^2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}, W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}). \quad (4.9)$$

Nach Korollar 3.3.13 ist $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Teilraum von $\mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Indem wir $\mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ in (4.8) durch \mathcal{M} ersetzen, gelangen wir zu der Galerkin-Variationsformulierung

$$a(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \langle C, \tilde{Y} \rangle_F \quad \text{für alle } \tilde{Y} \in \mathcal{M} \quad (4.10)$$

zur Bestimmung einer approximativen Lösung $\tilde{X} \in \mathcal{M}$. Sofern die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ C_s -stetig und C_k -koerziv ist, sichert das Lemma von Céa die eindeutige Lösbarkeit von (4.10).

Mit den Eigenschaften der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$, welche Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der kontinuierlichen Variationsformulierung sicherstellen — also die Voraussetzungen von Lemma 4.1.2 —, ergibt sich eine analoge Aussage für die Lösbarkeit der Galerkin-Variationsformulierung.

Lemma 4.1.4 (Eindeutige Lösbarkeit). *Seien \mathcal{I} und \mathcal{J} endliche Indexmengen sowie $a : \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$ so gegeben, dass*

$$\alpha \|X\|_F^2 \leq a(X, X) \leq \beta \|X\|_F^2 \quad \text{für alle } X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \quad (4.11)$$

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

gilt, dann besitzt die Galerkin-Variationsformulierung (4.10) für alle $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ eine eindeutige Lösung $\tilde{X} \in \mathcal{M}$ mit

$$\|\tilde{X}\|_F \leq \frac{1}{\alpha} \|C\|_F.$$

Zusätzlich gilt mit der Lösung $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ der kontinuierlichen Variationsformulierung (4.8) die Abschätzung

$$\|X - \tilde{X}\|_F \leq \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \inf_{\tilde{Y} \in \mathcal{M}} \|X - \tilde{Y}\|_F.$$

Beweis. Analog zu dem Beweis von Lemma 4.1.2 folgt aus (4.11) die C_k -Koerzivität sowie die C_s -Stetigkeit der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ mit $C_k := \alpha$ und $C_s := \beta$. Damit liefert das Lemma von Céa (siehe Lemma 2.3.3) Existenz und Eindeutigkeit einer Galerkin-Lösung $\tilde{X} \in \mathcal{M}$ von (4.10) sowie die Stabilitätsabschätzung

$$\|\tilde{X}\|_F \leq \frac{1}{\alpha} \|C\|_F.$$

Aufgrund der Symmetrie von $a(\cdot, \cdot)$ folgt nach Bemerkung 2.3.4 die Abschätzung

$$\|X - \tilde{X}\|_F \leq \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \inf_{\tilde{Y} \in \mathcal{M}} \|X - \tilde{Y}\|_F.$$

□

Bemerkung 4.1.5 (Energienorm). *Es seien die Voraussetzungen von Lemma 4.1.4 gegeben, dann folgt für die Lösung $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ der kontinuierlichen Variationsformulierung (4.8) und der Lösung $\tilde{X} \in \mathcal{M}$ der Galerkin-Variationsformulierung nach Bemerkung 2.3.4 die Abschätzung*

$$\|X - \tilde{X}\|_a \leq \inf_{\tilde{Y} \in \mathcal{M}} \|X - \tilde{Y}\|_a$$

in der Energienorm.

Der hier vorgestellte Zugang zum Lösen von Matrixgleichungen wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit als das *Matrix-Galerkin-Verfahren* bezeichnet. Für die konkrete Berechnung einer Lösung untersuchen wir nun die Darstellung des aus der Galerkin-Variationsformulierung (4.10) resultierenden linearen Gleichungssystems.

Matrix-Galerkin-Gleichungssystem

Wir betrachten für zwei endliche Indexmengen \mathcal{I} und \mathcal{J} wieder die Matrixgleichung

$$AXB^* = C$$

mit $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$, $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$, rechter Seite $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und gesuchter Lösung $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Wie vorher diskutiert, führt dies auf die kontinuierliche Variationsformulierung

$$a(X, Y) = \langle C, Y \rangle_F \quad \text{für alle } Y \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$$

mit der Bilinearform

$$a : \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto \langle AXB^*, Y \rangle_F$$

sowie auf die daraus resultierende Galerkin-Variationsformulierung

$$a(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \langle A\tilde{X}B^*, \tilde{Y} \rangle_F = \langle C, \tilde{Y} \rangle_F \quad \text{für alle } \tilde{Y} \in \mathcal{M} \quad (4.12)$$

mit dem Raum $\mathcal{M} = \mathcal{H}^2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}, W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}})$ der \mathcal{H}^2 -Matrizen für einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und zwei geschachtelte Clusterbasen $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ sowie $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ (vgl. (4.9)).

Vor der Untersuchung der konkreten Darstellung des aus (4.12) resultierenden linearen Gleichungssystems wird eine vereinfachende Annahme im Bezug auf die Clusterbasen getroffen. Diese wird es uns ermöglichen, in den späteren Algorithmen und Analysen auf eine Unterscheidung zwischen zulässigen und unzulässigen Blättern des Blockbaums zu verzichten.

Korollar 4.1.6 (Voller Rang). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum sowie $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ zwei orthogonale Clusterbasen mit Rangverteilungen $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ bzw. $L_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$. Es gelte*

$$\#\hat{t} = \#K_t \quad \text{und} \quad \#\hat{s} = \#L_s \quad \text{für alle } (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^-,$$

dann folgt

$$\chi_t X \chi_s = V_t (V_t^* X W_s) W_s^* \quad \text{für alle } (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^-.$$

Beweis. Sei $(t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^-$. Wir zeigen, dass $V_t V_t^* = \chi_t$ und $W_s W_s^* = \chi_s$ gelten.

Mit der Eigenschaft $V_t = \chi_t V_t$ einer Clusterbasis folgt

$$\text{Bild}(V_t) \subseteq \text{Bild}(\chi_t). \quad (4.13)$$

Die Orthogonalität der Zeilenclusterbasis liefert $V_t^* V_t = I$, womit die Spalten von V_t eine Orthonormalbasis von $\text{Bild}(V_t)$ bilden. Mit der Voraussetzung $\#K_t = \#\hat{t}$ folgt dann

$$\dim(\text{Bild}(V_t)) = \#K_t = \#\hat{t} = \dim(\text{Bild}(\chi_t)).$$

Zusammen mit Gleichung (4.13) gilt also

$$\text{Bild}(V_t) = \text{Bild}(\chi_t).$$

Sei $x \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$, dann gilt $\chi_t x \in \text{Bild}(\chi_t) = \text{Bild}(V_t)$. Es existiert also ein $y \in \mathbb{R}^{K_t}$ so, dass $\chi_t x = V_t y$ gilt. Mit $V_t = \chi_t V_t$, $\chi_t = \chi_t^*$ (vgl. Korollar 3.3.2) und der Orthogonalität der Clusterbasis folgt

$$y = V_t^* V_t y = V_t^* \chi_t x = (\chi_t V_t)^* x = V_t^* x,$$

also

$$\chi_t x = V_t V_t^* x.$$

Da dies für alle $x \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ gilt, folgt $V_t V_t^* = \chi_t$. Analog folgt auch $\chi_s = W_s W_s^*$ und damit

$$\chi_t X \chi_s = V_t (V_t^* X W_s) W_s^*.$$

□

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

Bemerkung 4.1.7 (Gleichbehandlung zulässiger und unzulässiger Blätter). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum sowie $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $(W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ zwei orthogonale, geschachtelte Clusterbasen. Für eine Matrix $X \in \mathcal{H}^2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}, (W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}})$ existiert nach Definition eine Familie $(S_b)_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+}$ von Kopplungsmatrizen mit $S_b \in \mathbb{R}^{K_t \times L_s}$ für alle $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ so, dass

$$X = \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+} V_t S_b W_s^* + \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^-} \chi_t X \chi_s$$

gilt. Stellen wir nun

$$\#\hat{t} = \#K_t \quad \text{und} \quad \#\hat{s} = \#L_s \quad \text{für alle } (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^- \quad (4.14)$$

sicher und setzen

$$S_b := V_t^* X W_s \quad \text{für alle } b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^-,$$

dann gilt mit Korollar 4.1.6

$$X = \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+} V_t S_b W_s^* + \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^-} \chi_t X \chi_s = \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} V_t S_b W_s^*.$$

Unter der Voraussetzung (4.14) brauchen wir also nicht zwischen zulässigen und unzulässigen Blättern des Blockbaums zu unterscheiden. Berechnen wir nun für $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^-$ eine Kopplungsmatrix $S_b \in \mathbb{R}^{K_t \times L_s}$, so lässt sich über

$$V_t S_b W_s^* = V_t (V_t^* X W_s) W_s^* = \chi_t X \chi_s$$

die geforderte Darstellung wieder herstellen. Dies vereinfacht die folgende Diskussion hinsichtlich der Vermeidung diverser Fallunterscheidungen. Aus diesem Grund sei die Bedingung (4.14) ab hier vorausgesetzt, und wir betrachten im weiteren Verlauf dieser Arbeit nur orthogonale Clusterbasen.

Da für den Ansatzraum \mathcal{M} neben dem Blockbaum sowohl die Zeilen- als auch die Spaltenclusterbasis vorgegeben sind, reduziert sich die Berechnung einer Lösung der Galerkin-Variationsformulierung (4.12) auf die Bestimmung einer Familie von Kopplungsmatrizen. Um von der Galerkin-Variationsformulierung zu einem linearen Gleichungssystem zu gelangen, benötigen wir eine Basis des Raums \mathcal{M} . Hierzu werden wir \mathcal{M} in lokale Teilräume zerlegen und für diese jeweils eine Basis angeben, die dann zusammen eine Basis von \mathcal{M} definieren — vgl. auch mit der in [35, Kapitel 8] verwendeten Herangehensweise zur Definition von \mathcal{H}^2 -Matrizen.

Definition 4.1.8 (Lokale Teilräume). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum sowie $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $(W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ zwei geschachtelte Clusterbasen, dann definieren wir für alle $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ die Mengen

$$\mathcal{M}_b := \{V_t S_b W_s^* \mid S_b \in \mathbb{R}^{K_t \times L_s}\}. \quad (4.15)$$

Die Tatsache, dass die Mengen aus Definition 4.1.8 Teilräume des $\mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ definieren, lässt sich direkt nachrechnen. Wir werden nun zeigen, dass sich \mathcal{M} als *direkte Summe* (vgl. [11, Abschnitt 1.6 Definition 3]) der Teilräume darstellen lässt und geben eine Basis dieser Teilräume an.

Lemma 4.1.9 (Direkte Summe). *Seien ein Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie zwei orthogonale, geschachtelte Clusterbasen $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $(W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ gegeben, dann gilt*

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \mathcal{M}_b,$$

und für alle $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ bildet die Menge

$$\{(V_t e_i)(W_s e_j)^* \mid (i, j) \in K_t \times L_s\} \quad (4.16)$$

eine Orthonormalbasis (bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$) von \mathcal{M}_b .

Beweis. Wie vorher erwähnt, bilden die \mathcal{M}_b für alle $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ lineare Unterräume von $\mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Sei $X \in \mathcal{M}$, dann existiert nach Definition eine Familie $(S_b)_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ von Kopplungsmatrizen mit $S_b \in \mathbb{R}^{K_t \times L_s}$ für alle $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie

$$X = \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} V_t S_b W_s^*,$$

also $X \in \sum_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \mathcal{M}_b$. Sei nun $\bar{X} \in \sum_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \mathcal{M}_b$, dann existiert für alle $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ eine Matrix $\bar{S}_b \in \mathbb{R}^{K_t \times L_s}$ mit $V_t \bar{S}_b W_s^* \in \mathcal{M}_b$ und

$$\bar{X} = \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} V_t \bar{S}_b W_s^*.$$

Nach Definition gilt dann auch $\bar{X} \in \mathcal{M}$, womit insgesamt

$$\mathcal{M} = \sum_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \mathcal{M}_b$$

folgt.

Nach Lemma 3.2.5 bilden die Beschriftungen der Elemente aus $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ eine disjunkte Partition von $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$. Damit folgt insbesondere für alle $b', b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $b' \neq b$ auch

$$\mathcal{M}_{b'} \cap \mathcal{M}_b = \{0\}$$

und somit für alle $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$

$$\mathcal{M}_b \cap \sum_{\substack{b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \\ b' \neq b}} \mathcal{M}_{b'} = \{0\}.$$

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

Es gilt also

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \mathcal{M}_b.$$

Sei nun $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $V_t S_b W_s^* \in \mathcal{M}_b$, dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in K_t \times L_s} (S_b)_{ij} (V_t e_i) (W_s e_j)^* &= \sum_{(i,j) \in K_t \times L_s} (S_b)_{ij} V_t (e_i e_j^*) W_s^* \\ &= V_t \left(\sum_{(i,j) \in K_t \times L_s} (S_b)_{ij} (e_i e_j^*) \right) W_s^* \\ &= V_t S_b W_s. \end{aligned}$$

Somit lässt sich jedes Element aus \mathcal{M}_b durch eine Linearkombination der Elemente aus (4.16) darstellen. Für $(i, j), (k, l) \in K_t \times L_s$ gilt aufgrund der Orthogonalität der Clusterbasen

$$\begin{aligned} \langle (V_t e_i) (W_s e_j)^*, (V_t e_k) (W_s e_l)^* \rangle_F &= \langle V_t (e_i e_j^*) W_s^*, V_t (e_k e_l^*) W_s^* \rangle_F \\ &= \langle V_t^* V_t (e_i e_j^*) W_s^* W_s, e_k e_l^* \rangle_F \\ &= \langle e_i e_j^*, e_k e_l^* \rangle_F = \delta_{(i,j)(k,l)}, \end{aligned}$$

wobei

$$\delta_{(i,j)(k,l)} := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } (i, j) = (k, l), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

das *Kronecker-Delta* bezeichne. Die Menge aus (4.16) definiert somit eine Orthonormalbasis von \mathcal{M}_b . \square

Dieses Lemma verdeutlicht durch (4.16) noch einmal die Bezeichnung *Clusterbasis*. Wir sind nun also in der Lage, die Galerkin-Variationsformulierung (4.12) weiter zu untersuchen. Seien dazu $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum und $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ sowie $(W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ wieder zwei orthogonale, geschachtelte Clusterbasen. Eine Basis von

$$\mathcal{M} = \mathcal{H}^2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}, (W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}})$$

ist nach Lemma 4.1.9 durch die Vereinigung der Basen von \mathcal{M}_b für alle $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gegeben. Für $\tilde{X} \in \mathcal{M}$ existiert nach Definition eine Familie $(S_b)_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ von Kopplungsmatrizen mit $S_b \in \mathbb{R}^{K_t \times L_s}$ für alle $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie

$$\tilde{X} = \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} V_t S_b W_s^*.$$

Als *Testmatrix* $\tilde{Y} \in \mathcal{M}$ setzen wir nun ein Basiselement ein. Seien dafür $b' = (t', s') \in$

$\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, $(i, j) \in K_{t'} \times L_{s'}$ und $\tilde{Y} := (V_{t'} e_i)(W_{s'} e_j)^*$, dann gilt

$$\begin{aligned}
a(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \langle A\tilde{X}B^*, \tilde{Y} \rangle_F = \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \langle AV_t S_b W_s^* B^*, (V_{t'} e_i)(W_{s'} e_j)^* \rangle_F \\
&= \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \langle AV_t S_b W_s^* B^*, V_{t'}(e_i e_j^*) W_{s'}^* \rangle_F \\
&= \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \langle (V_{t'}^* AV_t) S_b (W_s^* B^* W_{s'}), e_i e_j^* \rangle_F \\
&= \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} ((V_{t'}^* AV_t) S_b (W_s^* B W_s)^*)_{ij}.
\end{aligned}$$

Für die rechte Seite von (4.12) folgt

$$\begin{aligned}
\langle C, \tilde{Y} \rangle_F &= \langle C, (V_{t'} e_i)(W_{s'} e_j)^* \rangle_F = \langle C, V_{t'}(e_i e_j^*) W_{s'}^* \rangle_F \\
&= \langle V_{t'}^* C W_{s'}, e_i e_j^* \rangle_F = (V_{t'}^* C W_{s'})_{ij}
\end{aligned}$$

und damit insgesamt

$$\sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} ((V_{t'}^* AV_t) S_b (W_s^* B W_s)^*)_{ij} = (V_{t'}^* C W_{s'})_{ij}.$$

Wir fassen die einzelnen Einträge für den Block $b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ wieder in einer Matrix zusammen und erhalten die Gleichung

$$\sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} (V_{t'}^* AV_t) S_b (W_s^* B W_s)^* = V_{t'}^* C W_{s'}.$$

Betrachten wir die Herleitung nun für alle Elemente aus $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, dann führt dies auf ein System von linearen Matrixgleichungen zur Bestimmung der unbekannten Kopplungsmatrizen $(S_b)_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$. Wir bestimmen also die Koeffizienten für die einzelnen Elemente der Basis eines lokalen Teilraums $\mathcal{M}_{b'}$ mit $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ simultan. Dies führt auf das *Matrix-Galerkin-Gleichungssystem*.

Definition 4.1.10 (Matrix-Galerkin-Gleichungssystem). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$, $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ und $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ orthogonale, geschachtelte Clusterbasen. Das System linearer Matrixgleichungen*

$$\sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} (V_{t'}^* AV_t) S_b (W_s^* B W_s)^* = V_{t'}^* C W_{s'} \quad \text{für alle } b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \quad (4.17)$$

zur Bestimmung einer Familie $(S_b)_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ von Kopplungsmatrizen nennen wir dann Matrix-Galerkin-Gleichungssystem für $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, A , B , C , $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$.

Geht aus dem Zusammenhang die Zugehörigkeit von (4.17) zu einem oder mehreren zugrundeliegenden Parametern eindeutig hervor, so lassen wir diese(n) auch vereinfachend weg, wenn wir auf das entsprechende Matrix-Galerkin-Gleichungssystem Bezug nehmen.

Bemerkung 4.1.11 (Allgemeine lineare Matrixgleichung). *Wie in Bemerkung 4.1.3 betrachten wir für zwei endliche Indexmengen \mathcal{I} und \mathcal{J} die allgemeine lineare Matrixgleichung*

$$\sum_{i=1}^N A_i X B_i^* = C \quad (4.18)$$

mit $N \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B_i \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ sowie $X, C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Nach dortiger Diskussion lässt sich die Bilinearform der Variationsformulierung von (4.18) durch

$$a : \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto \sum_{i=1}^N a_i(X, Y)$$

über die Bilinearformen

$$a_i : \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto \langle A_i X B_i^*, Y \rangle_F$$

für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ auf den oben diskutierten Fall zurückführen. Damit ergibt sich auf analoge Weise das allgemeine Matrix-Galerkin-Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^N \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} (V_t^* A_i V_t) S_b (W_{s'}^* B_i W_s)^* = V_t^* C W_{s'} \quad \text{für alle } b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$$

zum approximativen Lösen von (4.18).

Die Koeffizienten des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems (4.17) — im Folgenden *Koeffizientenmatrizen* genannt — sind für zwei Blätter des Blockbaums durch eine Matrix-Multiplikation von links und eine Matrix-Multiplikation von rechts mit der entsprechenden Kopplungsmatrix definiert. Wir werden uns nun mit dem *Besetztheitsmuster* dieses Gleichungssystems näher befassen.

4.2 Besetztheitsmuster

Im Vordergrund der folgenden Betrachtungen steht das Ziel, *effiziente Algorithmen* für das Matrix-Galerkin-Verfahren zu entwickeln. Dies bedeutet im vorliegenden Abschnitt die Konstruktion des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems (siehe Definition 4.1.10) mit optimaler Komplexität — also mit einem in der Mächtigkeit beider zugrundeliegenden Indexmengen asymptotisch linearen Aufwand.

Für einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, zwei Clusterbasen $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$, zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ sowie einen festen Block $b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sind in Bezug auf das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem nur diejenigen Blöcke $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ von Interesse, für die

$$V_t^* A V_t \neq 0 \quad \text{und} \quad W_{s'}^* B W_s \neq 0 \quad (4.19)$$

gilt (vgl. (4.17)) — hierbei ist zu beachten, dass $W_{s'}^* B W_s \neq 0$ äquivalent zu $(W_{s'}^* B W_s)^* \neq 0$ ist. Wir werden nun untersuchen, für welche Blockkombinationen (4.19) gilt bzw. überhaupt in Frage kommt.

Da die Matrix $V_{t'}^* A V_t$ nur von den beiden Zeilenclustern $t', t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und die Matrix $W_{s'}^* B W_s$ nur von den Spaltenclustern $s', s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ abhängt, liegt es nahe, eine geeignete Vorbetrachtung für die beiden Clusterbäume separat durchzuführen.

Wir werden uns hier — wie auch schon bei der Variationsformulierung aus Abschnitt 4.1 — einer der Grundideen der Methode der finiten Elemente bedienen. Bei der Wahl der Finite-Elemente-Basis zur Diskretisierung eines partiellen Differentialoperators ist die Lokalität der Träger aller Basisfunktionen eine entscheidende Eigenschaft, die zu einem schwachbesetzten Gleichungssystem führt. Da ein partieller Differentialoperator nur lokal operiert, können Einträge des aus der Variationsformulierung resultierenden Gleichungssystems nur dort ungleich null sein, wo sich Träger von Basisfunktionen überschneiden (vgl. Abschnitt 1.1). Jede einzelne Basisfunktion besitzt typischerweise nur einen lokalen Träger, womit sich dieser im Idealfall nur mit konstant vielen anderen Trägern überschneidet. Gilt also für die Träger $\text{supp}(\varphi)$ und $\text{supp}(\tilde{\varphi})$ zweier Basisfunktionen φ und $\tilde{\varphi}$

$$\text{supp}(\varphi) \cap \text{supp}(\tilde{\varphi}) \neq \emptyset, \quad (4.20)$$

so ist der entsprechende Koeffizient im linearen Gleichungssystem ein möglicher Kandidat für einen Nicht-Null-Eintrag. Je nach zugrundeliegendem Differentialoperator und Beschaffenheit der Diskretisierung kann ein Eintrag jedoch auch null sein, obwohl (4.20) gilt. Dies ist also nur eine *notwendige Bedingung*.

In Anlehnung an diese Herangehensweise liegt das Interesse auf der Definition eines Kriteriums, welches (4.20) für das Matrix-Galerkin-Verfahren ersetzt. Für zwei Cluster $t', t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ stellt sich also die Frage, wann

$$V_{t'}^* A V_t = 0$$

gilt bzw. welche Bedingung zwei Cluster $t', t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ erfüllen müssen, damit überhaupt

$$V_{t'}^* A V_t \neq 0$$

gelten kann. Ein solcher Zusammenhang zwischen t' und t wäre dann ein Kriterium, welches die Rolle von (4.20) für das Matrix-Galerkin-Verfahren übernehmen könnte. Um so eine Beziehung bzw. *Relation* zwischen zwei Clustern greifbarer zu machen, wird in den nächsten Abschnitten näher hierauf eingegangen. Zusätzlich dienen die Abschnitte 4.2.1 und 4.2.2 dazu, Strukturen einzuführen sowie Aussagen zu beweisen, die sich im weiteren Verlauf als grundlegende Hilfsmittel erweisen werden.

4.2.1 Relationen

Wir führen nun zunächst eine Relation auf Clusterbäumen ein. Mit deren Hilfe definieren wir Blockrelationen und werden verdeutlichen, wie sich das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem mit diesen Relationen charakterisieren lässt.

Cluster-, Produkt- und Blockrelationen

Definition 4.2.1 (Clusterrelation). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, dann nennen wir eine Relation $\tau_{\mathcal{I}} \sim \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ Clusterrelation in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und schreiben für alle $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$

$$p \tau_{\mathcal{I}} \sim q \text{ genau dann, wenn } (p, q) \in \tau_{\mathcal{I}} \sim$$

sowie

$$p \tau_{\mathcal{I}} \not\sim q \text{ genau dann, wenn } (p, q) \notin \tau_{\mathcal{I}} \sim.$$

Wenn aus dem Zusammenhang klar hervorgeht, welcher Clusterbaum zugrundeliegt, lassen wir den Zusatz „in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ “ auch einfach weg und schreiben ggf. auch \sim anstelle von $\tau_{\mathcal{I}} \sim$.

Bemerkung 4.2.2 (Clusterrelation). Das Zeichen \sim wird in der Literatur häufig im Zusammenhang mit Äquivalenzrelationen verwendet. Aus diesem Grund sei angemerkt, dass in Definition 4.2.1 keine weiteren Eigenschaften der Relation gefordert werden. Insbesondere muss diese also weder reflexiv, symmetrisch noch transitiv sein.

In der nachstehenden Definition führen wir eine spezielle Clusterrelation für das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem ein, welche — wie oben beschrieben — als erste Verallgemeinerung der Aussage (4.19) zu sehen ist. Verdeutlicht wird dies durch das darauf folgende Lemma.

Definition 4.2.3 (Matrix-Galerkin-Clusterrelation). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum und $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$. Die Clusterrelation $\tau_{\mathcal{I}} \asymp_A \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, definiert durch

$$p \tau_{\mathcal{I}} \asymp_A q \quad :\Leftrightarrow \quad \exists (i, j) \in \hat{p} \times \hat{q} : \quad a_{ij} \neq 0$$

für alle $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, bezeichnen wir als Matrix-Galerkin-Clusterrelation bzgl. A in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$.

Wenn aus dem Zusammenhang klar hervorgeht, welcher Clusterbaum zugrundeliegt, werden wir vereinfachend auch \asymp_A verwenden.

Lemma 4.2.4 (Nicht-Null-Koeffizient). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ eine Clusterbasis, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und \asymp_A die Matrix-Galerkin-Clusterrelation bzgl. A in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$. Für alle $t', t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $V_{t'}^* A V_t \neq 0$ gilt $t' \tau_{\mathcal{I}} \asymp_A t$.

Beweis. Seien $t', t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $t' \tau_{\mathcal{I}} \not\asymp_A t$, dann folgt nach Definition $a_{ij} = 0$ für alle $(i, j) \in \hat{t}' \times \hat{t}$. Es gilt also

$$\begin{aligned} \chi_{t'} A \chi_t &= \left(\sum_{i \in \hat{t}'} e_i e_i^* \right) A \left(\sum_{j \in \hat{t}} e_j e_j^* \right) = \sum_{i \in \hat{t}'} \sum_{j \in \hat{t}} e_i (e_i^* A e_j) e_j^* \\ &= \sum_{(i, j) \in \hat{t}' \times \hat{t}} a_{ij} e_i e_j^* = \sum_{(i, j) \in \hat{t}' \times \hat{t}} 0 e_i e_j^* = 0 \end{aligned}$$

und damit

$$V_{t'}^* A V_t = V_{t'}^* \chi_{t'}^* A \chi_t V_t = V_{t'}^* \chi_{t'} A \chi_t V_t = V_{t'}^* 0 V_t = 0.$$

Die Aussage folgt somit per Kontraposition. \square

Da wir nicht nur an Relationen von Clustern, sondern vielmehr an Relationen von Clustertupeln — bzw. Blöcken — interessiert sind, definieren wir nachstehend sogenannte *Produktrelationen*, die eine Verbindung zweier Clusterrelationen herstellen.

Definition 4.2.5 (Produktrelation). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ Clusterbäume sowie $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ eine Clusterrelation in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\tau_{\mathcal{J}} \sim$ eine Clusterrelation in $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$, dann bezeichnen wir die Relation $(\tau_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}) \sim \subseteq (\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{J}}) \times (\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{J}})$, definiert durch

$$(p_1, q_1) (\tau_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}) \sim (p_2, q_2) \quad :\Leftrightarrow \quad ((p_1 \tau_{\mathcal{I}} \sim p_2) \wedge (q_1 \tau_{\mathcal{J}} \sim q_2))$$

für alle $(p_1, q_1), (p_2, q_2) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$, als Produktrelation bzgl. $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ und $\tau_{\mathcal{J}} \sim$ in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$.

Für einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gilt nach Definition $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$, womit wir eine Produktrelation in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ auch auf $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ betrachten — bzw. einschränken — können. Diese nennen wir dann *Blockrelation*.

Definition 4.2.6 (Blockrelation). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ eine Clusterrelation in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, $\tau_{\mathcal{J}} \sim$ eine Clusterrelation in $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ und $(\tau_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}) \sim$ die Produktrelation bzgl. $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ und $\tau_{\mathcal{J}} \sim$ in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$, dann bezeichnen wir die Relation

$$\tau_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \sim := ((\tau_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}) \sim \cap (\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}})) \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$$

als Blockrelation bzgl. $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ und $\tau_{\mathcal{J}} \sim$ in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.

Bemerkung 4.2.7 (Blockrelation). Nach Lemma 3.2.2 ist jeder Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Clusterbaum für die Indexmenge $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$. Somit ist die in der Definition 4.2.6 eingeführte Blockrelation in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ auch eine Clusterrelation in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ im Sinne von Definition 4.2.1. Insbesondere gelten damit im Folgenden alle Aussagen über allgemeine Clusterrelationen ebenso für Blockrelationen.

In der Einleitung dieses Abschnitts wurde bereits beschrieben, dass es das Ziel ist, für alle Blätter $b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ eines Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ diejenigen $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ zu bestimmen, deren Koeffizienten im Matrix-Galerkin-Gleichungssystem ungleich null sind — also für die (4.19) in Frage kommt. Hierzu lässt sich nun eine Blockrelation verwenden, die auf zwei Matrix-Galerkin-Clusterrelationen — eine für den Zeilen- und eine für den Spaltenclusterbaum — beruht. So eine Blockrelation führen wir in der nachstehenden Definition ein und nennen diese *Matrix-Galerkin-Blockrelation*.

Definition 4.2.8 (Matrix-Galerkin-Blockrelation). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ sowie $\tau_{\mathcal{I}} \asymp_A$ die Matrix-Galerkin-Clusterrelation bzgl. A in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\tau_{\mathcal{J}} \asymp_B$ die Matrix-Galerkin-Clusterrelation bzgl. B in $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$, dann bezeichnen wir die Blockrelation $\tau_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \asymp_{(A,B)}$ bzgl. $\tau_{\mathcal{I}} \asymp_A$ und $\tau_{\mathcal{J}} \asymp_B$ in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ als Matrix-Galerkin-Blockrelation bzgl. A und B in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.

Wenn aus dem Zusammenhang klar hervorgeht, welcher Blockbaum zugrundeliegt, werden wir die vereinfachte Schreibweise $\asymp_{(A,B)}$ verwenden. Des Weiteren setzen wir im Folgenden bei der Verwendung von $\asymp_{(A,B)}$ — bzw. $\tau_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \asymp_{(A,B)}$ — immer voraus, dass \asymp_A und \asymp_B — bzw. $\tau_{\mathcal{I}} \asymp_A$ und $\tau_{\mathcal{J}} \asymp_B$ — die zugrundeliegenden Matrix-Galerkin-Clusterrelationen sind.

Zusammen mit Lemma 4.2.4 ergibt sich nun die folgende Aussage, die den gewünschten Zusammenhang zwischen der Matrix-Galerkin-Blockrelation und dem Matrix-Galerkin-Gleichungssystem verdeutlicht.

Korollar 4.2.9 (Nicht-Null-Koeffizienten). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ Clusterbasen, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ sowie $\asymp_{(A,B)}$ die Matrix-Galerkin-Blockrelation bzgl. A und B in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Für alle $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $V_{t'}^* A V_t \neq 0$ und $W_s^* B W_{s'} \neq 0$ gilt $b' \asymp_{(A,B)} b$.*

Beweis. Seien $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $V_{t'}^* A V_t \neq 0$ und $W_s^* B W_{s'} \neq 0$. Lemma 4.2.4 liefert dann $t' \asymp_A t$ und $s' \asymp_B s$. Mit der Definition der Blockrelation gilt damit $b' \asymp_{(A,B)} b$. \square

Korollar 4.2.9 zeigt, dass die Koeffizientenmatrizen aus (4.19) für $b', b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ eines Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ nur dann ungleich Null sein können, falls $b' \asymp_{(A,B)} b$ gilt. Diese Eigenschaft stellt also das gewünschte *notwendige Kriterium* dar.

Vererbare Relationen

Für die weitere Diskussion wird sich eine charakteristische Eigenschaft von Clusterrelationen — und damit auch von Blockrelationen (vgl. Bemerkung 4.2.7) — als entscheidend herausstellen und als einzige Voraussetzung für viele Aussagen benötigt. Diese Eigenschaft sagt etwas darüber aus, wie sich die entsprechende Relation verhält, wenn wir im Clusterbaum zu Söhnen und/oder Vätern übergehen. Die Verwendung der erweiterten Söhne sons^+ anstatt der Sohnabbildung sons in der folgenden Definition dient nur der späteren Vermeidung von Fallunterscheidungen.

Definition 4.2.10 (Vererbare Relation). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum und \sim eine Clusterrelation in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, dann nennen wir \sim*

- (i) *in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ linksvererbbar, wenn für alle $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$*

$$p \sim q \text{ genau dann gilt, wenn } p^* \in \text{sons}^+(p) \text{ mit } p^* \sim q \text{ existiert}$$
und
- (ii) *in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ rechtsvererbbar, wenn für alle $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$*

$$p \sim q \text{ genau dann gilt, wenn } q^* \in \text{sons}^+(q) \text{ mit } p \sim q^* \text{ existiert.}$$

Des Weiteren nennen wir die Relation \sim in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ vererbbar, wenn \sim sowohl links- als auch rechtsvererbbar in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ist. Geht aus dem Zusammenhang klar hervor, welcher Clusterbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ zugrundeliegt, lassen wir den Zusatz „in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ “ auch vereinfachend weg.

Die nun folgenden Aussagen beschreiben das Verhalten vererbbarer Clusterrelationen im Bezug auf Söhne sowie Vor- und Nachfahren.

Lemma 4.2.11 (Söhne). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum und \sim eine in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ vererbbare Clusterrelation, dann gilt für alle $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$*

$p \sim q$ genau dann, wenn $p^* \in \text{sons}^+(p)$ und $q^* \in \text{sons}^+(q)$ mit $p^* \sim q^*$ existieren.

Beweis. Seien $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$.

„ \Rightarrow “: Es gelte $p \sim q$. Da \sim linksvererbbar ist, folgt die Existenz eines $p^* \in \text{sons}^+(p)$ mit $p^* \sim q$. Da \sim auch rechtsvererbbar ist, liefert dies wiederum die Existenz eines $q^* \in \text{sons}^+(q)$ mit $p^* \sim q^*$.

„ \Leftarrow “: Seien $p^* \in \text{sons}^+(p)$ und $q^* \in \text{sons}^+(q)$ mit $p^* \sim q^*$. Da \sim linksvererbbar ist, gilt $p \sim q^*$ und da \sim rechtsvererbbar ist, folgt wiederum $p \sim q$. \square

Lemma 4.2.12 (Vorfahren). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum und \sim eine in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ vererbbare Clusterrelation sowie $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $p \sim q$, dann gilt*

(a) $p \sim q^+$ für alle $q^+ \in \text{pred}(q)$ und

(b) $p^+ \sim q$ für alle $p^+ \in \text{pred}(p)$.

Beweis. (a) Wir beweisen diese Aussage für alle $q^+ \in \text{pred}(q)$ per Induktion über $\text{level}(q) - \text{level}(q^+) \in \mathbb{N}_0$.

Sei $q^+ \in \text{pred}(q)$ mit $\text{level}(q) - \text{level}(q^+) = 0$, dann gilt $\text{level}(q) = \text{level}(q^+)$, also $q^+ = q$. Da $p \sim q$ gilt, folgt $p \sim q^+$ und damit die Aussage in diesem Fall.

Sei nun $\ell \in \mathbb{N}_0$ so gegeben, dass $p \sim q^+$ für alle $q^+ \in \text{pred}(q)$ mit $\text{level}(q) - \text{level}(q^+) = \ell$ gilt.

Sei $q^+ \in \text{pred}(q)$ mit $\text{level}(q) - \text{level}(q^+) = \ell + 1$, dann gilt $\text{level}(q) > \text{level}(q^+)$ — also $q \neq q^{++}$ — und es existiert ein $q^{+*} \in \text{sons}(q^+)$ mit $q^{+*} \in \text{pred}(q)$ (siehe Korollar 2.4.21 (a)) sowie $\text{level}(q) \geq \text{level}(q^{+*})$. Da $\text{level}(q^{+*}) = \text{level}(q^+) + 1$ gilt, folgt

$$\text{level}(q) - \text{level}(q^{+*}) = \text{level}(q) - \text{level}(q^+) - 1 = \ell + 1 - 1 = \ell.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann $p \sim q^{+*}$ und da \sim rechtsvererbbar ist, folgt $p \sim q^+$.

(b) Auch diese Aussage lässt sich für alle $p^+ \in \text{pred}(p)$ per Induktion über $\text{level}(p) - \text{level}(p^+) \in \mathbb{N}_0$ beweisen.

Für $p^+ \in \text{pred}(p)$ mit $\text{level}(p) - \text{level}(p^+) = 0$ folgt analog zu Teil (a) dieses Lemmas $p^+ \sim q$ aus $p \sim q$ und $p^+ = p$.

Im Induktionsschritt wählen wir dann den Sohn $p^{+*} \in \text{sons}(p^+)$ von p^+ mit $p^{+*} \in \text{pred}(p)$ und es folgt mit der Induktionsvoraussetzung $p^{+*} \sim q$. Die Linksvererbbarkeit von \sim liefert $p^+ \sim q$, also die Aussage. \square

Korollar 4.2.13 (Vorfahren). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum und \sim eine in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ vererbbare Clusterrelation sowie $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $p \sim q$, dann gilt*

$$p^+ \sim q^+ \quad \text{für alle } p^+ \in \text{pred}(p) \text{ und } q^+ \in \text{pred}(q).$$

Beweis. Seien $p^+ \in \text{pred}(p)$ und $q^+ \in \text{pred}(q)$, dann folgt nach Lemma 4.2.12 (a) $p \sim q^+$ und nach Lemma 4.2.12 (b) $p^+ \sim q$. \square

Lemma 4.2.14 (Nachfahren). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, \sim eine in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ vererbbare Clusterrelation sowie $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $p \not\sim q$, dann gilt*

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

- (a) $p \not\sim q^*$ für alle $q^* \in \text{sons}^*(q)$ und
 (b) $p^* \not\sim q$ für alle $p^* \in \text{sons}^*(p)$.

Beweis. (a) Sei $q^* \in \text{sons}^*(q)$ mit $p \sim q^*$, dann folgt mit $q \in \text{pred}(q^*)$ nach Lemma 4.2.12 (a) $p \sim q$, womit sich die Aussage per Kontraposition ergibt.

(b) Diese Aussage folgt auf analoge Weise unter Verwendung von Lemma 4.2.12 (b). \square

Korollar 4.2.15 (Nachfahren). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, \sim eine in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ vererbbsbare Clusterrelation sowie $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $p \not\sim q$, dann gilt*

$$p^* \not\sim q^* \quad \text{für alle } p^* \in \text{sons}^*(p) \text{ und } q^* \in \text{sons}^*(q).$$

Beweis. Seien $p^* \in \text{sons}^*(p)$ und $q^* \in \text{sons}^*(q)$, dann folgt nach Lemma 4.2.14 (a) $p \not\sim q^*$ und nach Lemma 4.2.14 (b) $p^* \not\sim q$. \square

Die Eigenschaft des „in Relation Stehens“ vererbt sich somit zu den Vorfahren und die des „nicht in Relation Stehens“ zu den Nachfahren. Diese Tatsache werden wir ausnutzen, um Nicht-Null-Koeffizienten des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems zu charakterisieren. Zuvor zeigen wir, dass sich die Vererbbarkeit einer Blockrelation aus der Vererbbarkeit der dieser zugrundeliegenden Clusterrelationen ergibt, und beweisen, dass sowohl Matrix-Galerkin-Clusterrelationen als auch Matrix-Galerkin-Blockrelationen in den entsprechenden Bäumen vererbbsbar sind.

Lemma 4.2.16 (Vererbbarkeit). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ eine in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ vererbbsbare Clusterrelation, $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim$ eine in $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ vererbbsbare Clusterrelation und $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \sim$ die Blockrelation bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim$ in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, dann ist $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \sim$ in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ vererbbsbar.*

Beweis. Seien $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.

Linksvererbbsbar: „ \Rightarrow “: Es gelte $b' \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \sim b$, also $t' \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t$ und $s' \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim s$. Falls $\text{sons}(b') = \emptyset$ gilt, folgt mit $b^* := b'$ sofort $b^* \in \{b'\} = \text{sons}^+(b')$ und $b^* \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \sim b$.

Es gelte also $\emptyset \neq \text{sons}(b') = \text{sons}^+(t') \times \text{sons}^+(s')$. Da $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim$ als vererbbsbar vorausgesetzt sind, existieren $t'^* \in \text{sons}^+(t')$ mit $t'^* \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t$ und $s'^* \in \text{sons}^+(s')$ mit $s'^* \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim s$. Für $b^* := (t'^*, s'^*)$ folgt nach Konstruktion der Söhne $b^* = (t'^*, s'^*) \in \text{sons}^+(t') \times \text{sons}^+(s') = \text{sons}(b') = \text{sons}^+(b')$ und nach Definition der Blockrelation auch $b^* \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \sim b$.

„ \Leftarrow “: Sei nun $b^* = (t'^*, s'^*) \in \text{sons}^+(b')$ mit $b^* \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \sim b$, dann gilt nach Definition $t'^* \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t$ und $s'^* \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim s$. Falls $\text{sons}(b') = \emptyset$ gilt, folgt $b' = b^*$ und damit direkt $b' \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \sim b$.

Es gelte also $\text{sons}(b') \neq \emptyset$, dann folgt nach Konstruktion der Söhne $t'^* \in \text{sons}^+(t')$ und $s'^* \in \text{sons}^+(s')$. Die Vererbbarkeit von $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim$ liefert nun wieder $t' \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t$ und $s' \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim s$, also auch $b' \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \sim b$.

Rechtsvererbbsbar: Diese Eigenschaft ergibt sich unter Verwendung der Rechtsvererbbsbarkeit von $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim$ auf analoge Weise.

□

Korollar 4.2.17 (Matrix-Galerkin-Clusterrelation). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum und $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$, dann ist die Matrix-Galerkin-Clusterrelation \asymp_A bzgl. A in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ eine in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ vererb-
bare Clusterrelation.*

Beweis. Für alle $p \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ gilt nach Bemerkung 3.1.2

$$\hat{p} = \bigcup_{p^* \in \text{sons}^+(p)} \hat{p}^*. \quad (4.21)$$

Seien nun $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$.

Linksvererbbar: „ \Rightarrow “: Es gelte zuerst $p \asymp_A q$, das heißt es existiert $(i, j) \in \hat{p} \times \hat{q}$ mit $a_{ij} \neq 0$. Da (4.21) gilt, muss es einen Cluster $p^* \in \text{sons}^+(p)$ mit $i \in \hat{p}^*$ geben. Mit $a_{ij} \neq 0$ folgt dann $p^* \asymp_A q$.

„ \Leftarrow “: Sei nun $p^* \in \text{sons}^+(p)$ mit $p^* \asymp_A q$, dann existiert nach Definition $(i, j) \in \hat{p}^* \times \hat{q}$ mit $a_{ij} \neq 0$. Mit Gleichung (4.21) gilt $i \in \hat{p}$ und damit sofort auch $p \asymp_A q$.

Rechtsvererbbar: Diese Eigenschaft ergibt sich mit der Betrachtung von $\text{sons}^+(q)$ auf analoge Weise.

□

Korollar 4.2.18 (Matrix-Galerkin-Blockrelation). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum sowie $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$, dann ist die Matrix-Galerkin-Blockrelation $\asymp_{(A,B)}$ bzgl. A und B in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ eine in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ vererb-
bare Clusterrelation.*

Beweis. Nach Definition 4.2.8 ist $\asymp_{(A,B)}$ die Blockrelation bzgl. \asymp_A und \asymp_B in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Diese beiden Clusterrelationen sind nach Korollar 4.2.17 vererbbar, womit Lemma 4.2.16 die Vererbbarkeit von $\asymp_{(A,B)}$ liefert. □

4.2.2 Relationsbäume

Wir betrachten hier wieder das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem für einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, zwei Clusterbasen $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ sowie zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$. Das Ziel ist es nun, möglichst viele Paare von Clustern zu identifizieren, die *nicht* in Clusterrelation zueinander stehen. Wenn für die Matrix-Galerkin-Clusterrelation \asymp_A bzgl. A in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ für zwei Cluster $t', t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ zum Beispiel $t' \not\asymp_A t$ gilt, dann liefert die Kontraposition von Lemma 4.2.4

$$V_{t'}^* A V_t = 0.$$

Dieser Koeffizient darf also im Gleichungssystem weggelassen bzw. einfach ignoriert werden.

Haben wir zwei Cluster eines Clusterbaums identifiziert, die nicht in Relation stehen, so gilt dies nach Korollar 4.2.15 auch für alle Kombinationen von deren Nachfahren. Diese Überlegung führt zu der folgenden Definition.

Definition 4.2.19 (Zulässiger Relationsbaum). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum und \sim eine Clusterrelation in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$. Wir nennen \mathcal{T}_{\sim} einen bzgl. \sim zulässigen Relationsbaum — oder auch einfach Relationsbaum —, wenn \mathcal{T}_{\sim} ein zulässiger Blockbaum für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ als Zeilen- und Spaltenclusterbaum bzgl. der Zulässigkeitsbedingung*

$$(p, q) \text{ zulässig} \quad :\Leftrightarrow \quad p \not\sim q \quad \text{für alle } p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \quad (4.22)$$

ist.

Die Menge aller Blätter bezeichnen wir analog zu Definition 3.2.1 bzw. Definition 3.2.11 mit $\mathcal{L}_{\sim} = \mathcal{L}_{\sim}^+ \cup \mathcal{L}_{\sim}^-$, wobei \mathcal{L}_{\sim}^+ die Menge aller zulässigen und \mathcal{L}_{\sim}^- aller unzulässigen Blätter sei. Wenn aus dem Kontext deutlich wird, welche Relation zugrundeliegt, lassen wir den Zusatz „bzgl. \sim “ auch vereinfachend weg.

Ein Tupel von Clustern wird in obiger Definition als zulässig definiert, wenn diese Cluster nicht in Relation stehen. Wie vorher erwähnt, ist es für dieses Tupel dann *zulässig*, den zugehörigen Koeffizienten im Gleichungssystem auf null zu setzen bzw. einfach zu ignorieren. Die Definition 4.2.19 bildet zusammen mit der Definition 4.2.10 der Vererbbarkeit das Fundament für die Diskussion dieses Kapitels.

Bemerkung 4.2.20 (Auswertung der Zulässigkeitsbedingung). *Ein kritischer Punkt beim Aufstellen von Blockbäumen — und Relationsbäume sind nach Definition Blockbäume — ist die Auswertung der Zulässigkeitsbedingung. Im Idealfall sollte dies mit einem Aufwand in $\mathcal{O}(1)$ erfolgen, um den Gesamtaufwand für das Aufstellen unter Kontrolle zu halten. Wie genau dies für eine Matrix-Galerkin-Clusterrelation bzw. eine Matrix-Galerkin-Blockrelation (Definition 4.2.3 und Definition 4.2.8) erreichbar ist, wird in Abschnitt 4.3.2 näher erläutert.*

Wie in Abschnitt 4.1 hergeleitet und zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, liegt das Hauptinteresse auf Kombinationen von Blättern $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ eines Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, für die

$$V_{t'}^* A V_t \neq 0 \quad \text{und} \quad W_s^* B W_{s'} \neq 0 \quad (4.23)$$

bzgl. zweier Matrizen $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ sowie zweier Clusterbasen $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ gilt. Betrachten wir die Definition der Matrix-Galerkin-Blockrelation $\prec_{(A,B)}$ bzgl. A und B in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, so gilt für alle $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$

$$b' \not\prec_{(A,B)} b \quad \Leftrightarrow \quad ((t' \not\prec_A t) \vee (s' \not\prec_B s)).$$

Nach Kontraposition von Korollar 4.2.4 bedeutet dies, dass mindestens eine der beiden Koeffizientenmatrizen aus (4.23) gleich null ist, falls zwei Blätter nicht in Relation stehen. Wir werden nun zeigen, dass alle Kombinationen von Blättern, für die (4.23) gilt durch die unzulässigen Blätter des bzgl. $\prec_{(A,B)}$ zulässigen Relationsbaums charakterisierbar sind. Somit interessieren wir uns also gerade für diejenigen Blöcke $b', b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $b' \prec_{(A,B)} b$ oder anders geschrieben für alle $(b', b) \in \mathcal{L}_{\prec_{(A,B)}}^-$. Für die spätere algorithmische Konstruktion dieser Menge werden wir in Analogie zu Algorithmus 3.2.1 für das

Aufstellen eines minimal zulässigen Blockbaums den Relationsbaum $\mathcal{T}_{\sim(A,B)}$ durchlaufen. Da die zulässigen Blätter für unsere Zwecke nicht von Interesse sind — hier entstehen keine Nicht-Null-Einträge des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems —, stehen die *unzulässigen Blöcke* im Fokus der weiteren Betrachtungen. Aus diesem Grund fassen wir diese Blöcke mit der nachstehenden Definition in einer Menge zusammen.

Definition 4.2.21 (Unzulässige Blöcke). Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, dann nennen wir

$$\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^- := \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$$

die Menge aller unzulässigen Blöcke von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.

Die nun folgende Aussage charakterisiert die Menge $\mathcal{T}_{\sim}^- = \mathcal{T}_{\sim} \setminus \mathcal{L}_{\sim}^+$ aller unzulässigen Blöcke eines Relationsbaums \mathcal{T}_{\sim} . Aufgrund der — im Kontext der vorliegenden Arbeit — fundamentalen Bedeutung dieser Charakterisierung, nennen wir das nachstehende Lemma auch *Charakterisierungslemma*.

Lemma 4.2.22 (Charakterisierung). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, \sim eine in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ vererbare Clusterrelation sowie \mathcal{T}_{\sim} der zugehörige Relationsbaum.

Es gilt $(p, q) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$ genau dann, wenn $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $p \sim q$ und

- (i) $\text{level}(p) = \text{level}(q)$ oder
- (ii) $\text{level}(p) > \text{level}(q)$ mit $q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ oder
- (iii) $\text{level}(p) < \text{level}(q)$ mit $p \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$.

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei $(p, q) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$, dann gilt nach Konstruktion $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und mit $(p, q) \notin \mathcal{L}_{\sim}^+$ folgt die Unzulässigkeit dieses Blocks, also $p \sim q$. Es bleibt zu zeigen, dass eine der drei Aussagen (i), (ii) oder (iii) gilt.

Da \mathcal{T}_{\sim} ein Blockbaum im Sinne von Definition 3.2.1 ist, gilt mit Lemma 3.2.6 (a)

$$\text{level}((p, q)) = \max\{\text{level}(p), \text{level}(q)\}.$$

Es gilt dann entweder $\text{level}(p) = \text{level}(q)$, $\text{level}(p) < \text{level}(q)$ oder $\text{level}(p) > \text{level}(q)$. Falls $\text{level}(p) < \text{level}(q)$ gilt, folgt mit Lemma 3.2.6 (b) $p \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, also gilt (iii), und mit Lemma 3.2.6 (c) folgt $q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, falls $\text{level}(p) > \text{level}(q)$, also gilt (ii). Gilt $\text{level}(p) = \text{level}(q)$, so ist (i) erfüllt und damit die Aussage gezeigt.

„ \Leftarrow “: Wir beweisen diese Aussage induktiv über $\max\{\text{level}(p), \text{level}(q)\} \in \mathbb{N}_0$ für alle $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $p \sim q$.

Seien also zuerst $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $p \sim q$, $\max\{\text{level}(p), \text{level}(q)\} = 0$ und es gelte (i), (ii) oder (iii). Es folgt $\text{level}(p) = \text{level}(q) = 0$, also kann nur (i) gelten und es folgt $p = \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}) = q$. Nach Konstruktion von \mathcal{T}_{\sim} gilt dann $(p, q) \in \mathcal{T}_{\sim}$ und mit $p \sim q$ auch $(p, q) \notin \mathcal{L}_{\sim}^+$, also $(p, q) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$.

Sei $\ell \in \mathbb{N}_0$ so gegeben, dass für alle $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $p \sim q$, $\max\{\text{level}(p), \text{level}(q)\} = \ell$ sowie (i), (ii) oder (iii) die Aussage $(p, q) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$ gilt.

Seien nun $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $p \sim q$, $\max\{\text{level}(p), \text{level}(q)\} = \ell + 1$ und es gelte (i), (ii) oder (iii) für p und q .

Fall 1: Es gilt (i), also $\text{level}(p) = \text{level}(q) = \ell + 1$.

Dann folgt $\text{level}(p) > 0$ und $\text{level}(q) > 0$. Damit existieren die Väter von p und q in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, also $p^+, q^+ \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $p \in \text{sons}(p^+)$ und $q \in \text{sons}(q^+)$ sowie $\text{level}(p^+) = \text{level}(q^+) = \ell$. Es gilt dann $\max\{\text{level}(p^+), \text{level}(q^+)\} = \ell$.

Mit $p \sim q$ und Korollar 4.2.13 folgt $p^+ \sim q^+$. Die Induktionsvoraussetzung liefert also $(p^+, q^+) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$. Insbesondere ist (p^+, q^+) unzulässig und, da nach Definition der Söhne in diesem Fall $(p, q) \in \text{sons}(p^+) \times \text{sons}(q^+) = \text{sons}((p^+, q^+))$ gilt, folgt $(p, q) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$. Zusammen mit $p \sim q$ bedeutet dies $(p, q) \notin \mathcal{L}_{\sim}^+$ und damit $(p, q) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$.

Fall 2: Es gilt (ii), also $\ell + 1 = \text{level}(p) > \text{level}(q)$ und $q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$.

Da $\text{level}(p) > 0$ gilt, existiert ein Vater $p^+ \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ von p . Es gilt also $p \in \text{sons}(p^+)$ und $\text{level}(p^+) = \text{level}(p) - 1 = \ell + 1 - 1 = \ell$ sowie $\max\{\text{level}(p^+), \text{level}(q)\} = \ell$. Mit $p \sim q$ und der Linksvererbbarkeit folgt $p^+ \sim q$. Falls $\text{level}(q) = \ell$ gilt, folgt $\text{level}(p^+) = \text{level}(q)$ und falls $\text{level}(q) < \ell$ gilt, folgt $\text{level}(q) < \text{level}(p^+)$ mit $q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$. Für p^+ und q gilt also entweder (i) oder (ii). Die Induktionsvoraussetzung liefert dann $(p^+, q) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$. Insbesondere ist (p^+, q) unzulässig und mit $q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ folgt in diesem Fall $(p, q) \in \text{sons}(p^+) \times \{q\} = \text{sons}((p^+, q))$ und damit $(p, q) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$. Zusammen mit $p \sim q$ bedeutet dies $(p, q) \notin \mathcal{L}_{\sim}^+$, also $(p, q) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$.

Fall 3: Es gilt (iii), also $\text{level}(p) < \text{level}(q) = \ell + 1$ und $p \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$.

Dieser Fall folgt analog zum vorherigen unter Verwendung von $\text{level}(q) > 0$ und der Betrachtung des Vaters von q .

□

Korollar 4.2.23 (Unzulässige Blätter). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, \sim eine in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ vererbbare Clusterrelation und \mathcal{T}_{\sim} der zugehörige Relationsbaum. Es gilt $(p, q) \in \mathcal{L}_{\sim}^-$ genau dann, wenn $p, q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ mit $p \sim q$.*

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei $(p, q) \in \mathcal{L}_{\sim}^-$. Angenommen es gilt $\text{sons}(p) \neq \emptyset$, dann müsste nach Konstruktion $\text{sons}((p, q)) \neq \emptyset$ gelten, da (p, q) als unzulässig vorausgesetzt ist. Dies steht im Widerspruch dazu, dass (p, q) ein Blatt ist. Also muss $\text{sons}(p) = \emptyset$ gelten. Analog folgt $\text{sons}(q) = \emptyset$, damit also $p, q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und die Unzulässigkeit von (p, q) liefert $p \sim q$.

„ \Leftarrow “: Seien $p, q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ mit $p \sim q$, dann gilt entweder $\text{level}(p) = \text{level}(q)$, $\text{level}(p) < \text{level}(q)$ oder $\text{level}(p) > \text{level}(q)$. Mit $p, q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, ist immer eine der drei Bedingungen (i), (ii) oder (iii) aus dem Charakterisierungslemma 4.2.22 erfüllt, womit $(p, q) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$ folgt. Wegen $\text{sons}(p) = \emptyset = \text{sons}(q)$ gilt auch $(p, q) \in \mathcal{L}_{\sim}^-$. □

Wie schon erwähnt, sind die für das Matrix-Galerkin-Verfahren benötigten Tupel von Blöcken gerade die Paare von Blättern eines Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, die in Relation stehen. Das nachstehende Korollar zeigt — als einfache Folgerung des vorherigen — genau diesen Zusammenhang.

Korollar 4.2.24 (Unzulässige Blätter). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ zwei Matrizen, $\asymp_{(A,B)}$ die Matrix-Galerkin-Blockrelation bzgl. A und B in*

$\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie $\mathcal{T}_{\asymp_{(A,B)}}$ der zugehörige Relationsbaum. Es gilt $(b', b) \in \mathcal{L}_{\asymp_{(A,B)}}^-$ genau dann, wenn $b', b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $b' \asymp_{(A,B)} b$.

Beweis. Da die Matrix-Galerkin-Blockrelation $\asymp_{(A,B)}$ nach Korollar 4.2.18 in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ vererbbar und $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ nach Lemma 3.2.2 ein Clusterbaum für die Indexmenge $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ ist, folgt mit Korollar 4.2.23 die Aussage. \square

Korollar 4.2.24 zeigt, dass die Menge $\mathcal{L}_{\asymp_{(A,B)}}^-$ nicht zu reichhaltig ist — also nur aus Blattpaaren des zugrundeliegenden Blockbaums besteht — und andersherum auch nicht aus zu wenigen Elementen bestehen kann — also alle Tupel von Blättern enthält, die in Relation stehen. Zusammen mit Korollar 4.2.9 lässt sich das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem somit über $\mathcal{L}_{\asymp_{(A,B)}}^-$ charakterisieren.

Transponierte Relationsbäume

Bevor eine genauere Untersuchung des Relationsbaums $\mathcal{T}_{\asymp_{(A,B)}}$ — und damit insbesondere der das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem charakterisierenden Menge $\mathcal{L}_{\asymp_{(A,B)}}^-$ — folgt, betrachten wir die zu Relationsbäumen gehörenden transponierten Blockbäume. Diese benötigen wir — wie auch schon in vorherigen Abschnitten dieser Arbeit — für die Vermeidung „doppelter“ Beweisführungen. Die Grundidee der folgenden Betrachtungen ist, für eine Clusterrelation die sogenannten *transponierte Clusterrelation* zu definieren und zu zeigen, dass die jeweiligen transponierten Relationsbäume lediglich Relationsbäume bzgl. der transponierten Clusterrelation sind. Wir werden diese transponierten Clusterrelationen allgemein einführen und Aussagen beweisen, die sich anschließend sowohl auf Matrix-Galerkin-Clusterrelationen als auch auf Matrix-Galerkin-Blockrelationen anwenden lassen.

Definition 4.2.25 (Transponierte Relation). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum und $\tau_{\mathcal{I}} \sim \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ eine Clusterrelation in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, dann nennen wir die Clusterrelation $\tau_{\mathcal{I}} \sim^T \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, definiert durch*

$$q \tau_{\mathcal{I}} \sim^T p \quad :\Leftrightarrow \quad p \tau_{\mathcal{I}} \sim q \quad (4.24)$$

für alle $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, die zu $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ transponierte Clusterrelation. Unterliegt der zugrundeliegende Clusterbaum keiner Mehrdeutigkeit, so schreiben wir auch \sim^T anstelle von $\tau_{\mathcal{I}} \sim^T$.

Das nachstehende Korollar zeigt, dass sich die Vererbbarkeit einer Clusterrelation bzw. der zugehörigen transponierten Clusterrelation aus der Vererbbarkeit der jeweils anderen ergibt. Anschließend zeigen wir, dass sich eine transponierte Blockrelation bzgl. zweier Clusterrelation als Blockrelation zu den beiden transponierten Clusterrelation darstellen lässt.

Korollar 4.2.26 (Vererbbarkeit). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, \sim eine Clusterrelation in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und \sim^T die zu \sim transponierte Clusterrelation, dann ist \sim genau dann in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ vererbbar, wenn \sim^T in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ vererbbar ist.*

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

Beweis. Seien $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$.

„ \Rightarrow “: Sei \sim in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ vererbbar, dann ist \sim insbesondere in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ linksvererbbar und es gilt $p \sim q$ genau dann, wenn ein $p^* \in \text{sons}^+(p)$ mit $p^* \sim q$ existiert. Mit der Definition der transponierten Clusterrelation gilt dann $q \sim^T p$ genau dann, wenn ein $p^* \in \text{sons}^+(p)$ mit $q \sim^T p^*$ existiert, womit die Rechtsvererbbarkeit von \sim^T in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ folgt. Da \sim auch rechtsvererbbar in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ist, gilt $p \sim q$ genau dann, wenn ein $q^* \in \text{sons}^+(q)$ mit $p \sim q^*$ existiert. Wie bei der vorherigen Argumentation folgt mit der Definition der transponierten Clusterrelation dann $q \sim^T p$ genau dann, wenn ein $q^* \in \text{sons}^+(q)$ mit $q^* \sim^T p$ existiert. Damit ist \sim^T auch linksvererbbar, also vererbbar in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$.

„ \Leftarrow “: Diese Richtung folgt analog mit der Darstellung der transponierten Clusterrelation. Aus der Linksvererbbarkeit von \sim^T in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ folgt dann die Rechtsvererbbarkeit von \sim in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und aus der Rechtsvererbbarkeit von \sim^T in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ die Linksvererbbarkeit von \sim in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$. \square

Korollar 4.2.27 (Transponierte Blockrelation). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ eine Clusterrelation in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, $\tau_{\mathcal{J}} \sim$ eine Clusterrelation in $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ sowie $\tau_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \sim$ die Blockrelation bzgl. $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ und $\tau_{\mathcal{J}} \sim$ in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, dann ist die transponierte Blockrelation $\tau_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \sim^T$ von $\tau_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \sim$ gleich der Blockrelation bzgl. $\tau_{\mathcal{I}} \sim^T$ und $\tau_{\mathcal{J}} \sim^T$ in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.*

Beweis. Es bezeichne im Folgenden \simeq die Blockrelation bzgl. $\tau_{\mathcal{I}} \sim^T$ und $\tau_{\mathcal{J}} \sim^T$ in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Wir zeigen nun, dass $\simeq = \tau_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \sim^T$ gilt.

Seien $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und es gelte zuerst $b' \simeq b$, also nach Definition der Blockrelation $t' \tau_{\mathcal{I}} \sim^T t$ und $s' \tau_{\mathcal{J}} \sim^T s$. Dies ist äquivalent zu $t \tau_{\mathcal{I}} \sim t'$ und $s \tau_{\mathcal{J}} \sim s'$. Da $\tau_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \sim$ die Blockrelation bzgl. $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ und $\tau_{\mathcal{J}} \sim$ ist, folgt $b \tau_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \sim b'$ und damit $b' \tau_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \sim^T b$.

Es gelte nun $b' \tau_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \sim^T b$, also $b \tau_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \sim b'$ und damit $t \tau_{\mathcal{I}} \sim t'$ und $s \tau_{\mathcal{J}} \sim s'$. Es folgt $t' \tau_{\mathcal{I}} \sim^T t$ und $s' \tau_{\mathcal{J}} \sim^T s$, was $b' \simeq b$ nach Definition von \simeq bedeutet. Es folgt die Aussage. \square

Wie oben erwähnt, lässt sich zeigen, dass der transponierte Blockbaum eines Relationsbaums als Relationsbaum zur transponierten Clusterrelation darstellbar ist.

Lemma 4.2.28 (Transponierter Relationsbaum). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, \sim eine in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ vererbbare Clusterrelation und \sim^T die zugehörige transponierte Clusterrelation, dann ist \mathcal{T}_{\sim^T} der zu \mathcal{T}_{\sim} transponierte Blockbaum.*

Beweis. Wir werden zeigen, dass die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} (p, q) \in \mathcal{T}_{\sim} &\Leftrightarrow (q, p) \in \mathcal{T}_{\sim^T} \\ \text{und } (p, q) \in \mathcal{L}_{\sim}^+ &\Leftrightarrow (q, p) \in \mathcal{L}_{\sim^T}^+ \end{aligned} \tag{4.25}$$

gelten (vgl. Definition 3.2.13).

Zuerst betrachten wir $(p, q) \in \mathcal{T}_\sim^-$, dann gilt nach dem Charakterisierungslemma 4.2.22 $p \sim q$ und

$$\begin{aligned} & \text{level}(p) = \text{level}(q) \\ \text{oder} \quad & \text{level}(p) > \text{level}(q) \text{ mit } q \in \mathcal{L}_\mathcal{I} \\ \text{oder} \quad & \text{level}(p) < \text{level}(q) \text{ mit } p \in \mathcal{L}_\mathcal{I}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Nach Definition folgt $q \sim^T p$ und Korollar 4.2.26 liefert die Vererbbarkeit von \sim^T . Mit (4.26) sowie dem Charakterisierungslemma 4.2.22 gilt dann $(q, p) \in \mathcal{T}_{\sim^T}^-$.

Sei nun $(p, q) \in \mathcal{L}_\sim^+$, also insbesondere $p \not\sim q$. Gilt $(p, q) = \text{root}(\mathcal{T}_\sim)$, dann folgt $p = \text{root}(\mathcal{T}_\mathcal{I}) = q$ und mit $q \not\sim^T p$ nach Konstruktion eines Relationsbaums auch $(q, p) \in \mathcal{L}_{\sim^T}^+$.

Es gelte also $(p, q) \neq \text{root}(\mathcal{T}_\sim)$, dann existiert ein Vater $(p^+, q^+) \in \mathcal{T}_\sim \setminus \mathcal{L}_\sim \subseteq \mathcal{T}_\sim^-$ von (p, q) . Nach obiger Überlegung folgt dann $(q^+, p^+) \in \mathcal{T}_{\sim^T}^-$.

Wir bezeichnen die Sohnabbildung in \mathcal{T}_\sim mit sons_\sim und die Sohnabbildung in \mathcal{T}_{\sim^T} mit sons_{\sim^T} . Da $(p, q) \in \text{sons}^+(p^+) \times \text{sons}^+(q^+) = \text{sons}_\sim((p^+, q^+)) \neq \emptyset$ gilt, folgt $\text{sons}(p^+) \neq \emptyset$ oder $\text{sons}(q^+) \neq \emptyset$. Die Unzulässigkeit von (q^+, p^+) in \mathcal{T}_{\sim^T} liefert dann $\text{sons}_{\sim^T}((q^+, p^+)) \neq \emptyset$ und damit

$$(q, p) \in \text{sons}^+(q^+) \times \text{sons}^+(p^+) = \text{sons}_{\sim^T}((q^+, p^+)) \subseteq \mathcal{T}_{\sim^T}.$$

Mit $p \not\sim q$ folgt $q \not\sim^T p$ und somit $(q, p) \in \mathcal{L}_{\sim^T}^+$. Insgesamt ergibt sich also

$$\begin{aligned} (p, q) \in \mathcal{T}_\sim & \Rightarrow (q, p) \in \mathcal{T}_{\sim^T} \\ \text{und} \quad (p, q) \in \mathcal{L}_\sim^+ & \Rightarrow (q, p) \in \mathcal{L}_{\sim^T}^+. \end{aligned}$$

Da \sim^T die zu \sim transponierte Clusterrelation ist, ist \sim nach Definition die zu \sim^T transponierte Clusterrelation. Mit obiger Diskussion ergibt sich dann analog

$$\begin{aligned} (q, p) \in \mathcal{T}_{\sim^T} & \Rightarrow (p, q) \in \mathcal{T}_\sim \\ \text{und} \quad (q, p) \in \mathcal{L}_{\sim^T}^+ & \Rightarrow (p, q) \in \mathcal{L}_\sim^+. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also (4.25), womit \mathcal{T}_{\sim^T} nach Definition 3.2.13 — und aufgrund der Eindeutigkeit nach Lemma 3.2.15 — der zu \mathcal{T}_\sim transponierte Blockbaum ist. \square

An der Definition der transponierten Clusterrelation kann man erkennen, dass diese — durch das einfache Vertauschen der Reihenfolge der Cluster — eng mit der ursprünglichen Clusterrelation verbunden ist. Im speziellen Fall einer Matrix-Galerkin-Clusterrelation liegt eine Matrix zugrunde, welche die Clusterrelation definiert. Das folgende Korollar zeigt, dass sich durch den Übergang zur transponierten Matrix zwischen Matrix-Galerkin-Clusterrelation und transponierter Matrix-Galerkin-Clusterrelation hin und her wechseln lässt.

Korollar 4.2.29 (Transponierte Matrix-Galerkin-Clusterrelation). *Seien $\mathcal{T}_\mathcal{I}$ ein Clusterbaum und $A \in \mathbb{R}^{I \times I}$ sowie \asymp_A die Matrix-Galerkin-Clusterrelation bzgl. A in $\mathcal{T}_\mathcal{I}$. Für alle $p, q \in \mathcal{T}_\mathcal{I}$ gilt*

$$p \asymp_A q \text{ genau dann, wenn } p \asymp_{A^*}^T q.$$

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

Beweis. Seien $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$.

„ \Rightarrow “: Es gelte $p \asymp_A q$, dann existiert $(i, j) \in \hat{p} \times \hat{q}$ mit $a_{ij} \neq 0$. Für A^* gilt dann $a_{ji}^* = a_{ij} \neq 0$ und mit $(j, i) \in \hat{q} \times \hat{p}$ nach Definition $q \asymp_{A^*} p$. Die Definition der transponierten Clusterrelation liefert dann $p \asymp_{A^*}^T q$.

„ \Leftarrow “: Es gelte $p \asymp_{A^*}^T q$, dann gilt nach Definition $q \asymp_{A^*} p$, womit $(i, j) \in \hat{q} \times \hat{p}$ mit $a_{ij}^* \neq 0$ existiert. Für A gilt dann $a_{ji} = a_{ij}^* \neq 0$ und mit $(j, i) \in \hat{p} \times \hat{q}$ auch $p \asymp_A q$. \square

Auch im Fall einer Matrix-Galerkin-Blockrelation lassen sich diese und ihr transponiertes Gegenstück über das Transponieren der Matrizen ineinander überführen.

Korollar 4.2.30 (Transponierte Matrix-Galerkin-Blockrelation). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ sowie $\asymp_{(A,B)}$ die Matrix-Galerkin-Blockrelation bzgl. A und B in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Für alle $b', b \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gilt*

$$b' \asymp_{(A,B)} b \text{ genau dann, wenn } b' \asymp_{(A^*, B^*)}^T b.$$

Beweis. Seien $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.

„ \Rightarrow “: Es gelte $b' \asymp_{(A,B)} b$, dann folgt nach Definition der Blockrelation $t' \asymp_A t$ und $s' \asymp_B s$. Mit Korollar 4.2.29 gelten also $t' \asymp_{A^*}^T t$ und $s' \asymp_{B^*}^T s$. Die Definition der transponierten Clusterrelation liefert nun $t \asymp_{A^*} t'$ und $s \asymp_{B^*} s'$, was wiederum $b \asymp_{(A^*, B^*)} b'$ bedeutet. Mit der Definition der transponierten Blockrelation folgt $b' \asymp_{(A^*, B^*)}^T b$.

„ \Leftarrow “: Es gelte $b' \asymp_{(A^*, B^*)}^T b$, dann folgt nach Definition $b \asymp_{(A^*, B^*)} b'$, also $t \asymp_{A^*} t'$ und $s \asymp_{B^*} s'$. Mit Korollar 4.2.29 gilt dann $t \asymp_A^T t'$ und $s \asymp_B^T s'$, also nach Definition $t' \asymp_A t$ und $s' \asymp_B s$ und somit $b' \asymp_{(A,B)} b$. \square

Bemerkung 4.2.31 (Gleichheit). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$, \asymp_A die Matrix-Galerkin-Clusterrelation bzgl. A in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und \mathcal{T}_{\asymp_A} der zugehörige Relationsbaum, dann gelten nach Definition 3.2.13, Lemma 4.2.28 und Korollar 4.2.29 die Äquivalenzen*

$$(p, q) \in \mathcal{T}_{\asymp_A} \xleftrightarrow{3.2.13} (q, p) \in \mathcal{T}_{\asymp_A}^T \xleftrightarrow{4.2.28} (q, p) \in \mathcal{T}_{\asymp_A}^T \xleftrightarrow{4.2.29} (q, p) \in \mathcal{T}_{\asymp_{A^*}}$$

sowie

$$(p, q) \in \mathcal{L}_{\asymp_A}^+ \xleftrightarrow{3.2.13} (q, p) \in \mathcal{L}_{\asymp_A}^{T+} \xleftrightarrow{4.2.28} (q, p) \in \mathcal{L}_{\asymp_A}^{T+} \xleftrightarrow{4.2.29} (q, p) \in \mathcal{L}_{\asymp_{A^*}}^+.$$

Die Blockbäume $\mathcal{T}_{\asymp_A}^T$, $\mathcal{T}_{\asymp_A}^T$ und $\mathcal{T}_{\asymp_{A^*}}$ sind also identisch. Eine analoge Aussage ergibt sich für den transponierten Blockbaum eines auf einer Matrix-Galerkin-Blockrelation basierenden Relationsbaums.

Im Fall einer Matrix-Galerkin-Cluster- oder -Blockrelation sind wir dank der vorherigen Untersuchungen nun in der Lage, den transponierten Blockbaum darzustellen, indem wir entweder die transponierte Clusterrelation verwenden oder zur transponierten Matrix — bzw. zu den transponierten Matrizen — übergehen.

Der Großteil der Aussagen in den folgenden Abschnitten wird so formuliert und bewiesen, dass diese sowohl für Clusterrelationen als auch für deren transponierte Gegenstücke gelten. Somit lassen sich „unnötige“ Beweisführungen — die z.B. aufgrund symmetrischer Aussagen auftreten — vermeiden.

4.3 Matrix-Galerkin-Relationsbäume

Durch die vorherigen Abschnitte wird deutlich, warum der Relationsbaum $\mathcal{T}_{\asymp_{(A,B)}}$, basierend auf einem Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und einer Matrix-Galerkin-Blockrelation $\asymp_{(A,B)}$ bzgl. $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, für die theoretische Beschreibung des korrespondierenden Matrix-Galerkin-Gleichungssystems von Bedeutung ist. Das Korollar 4.2.24 unterstreicht hier die besondere Rolle der Menge aller unzulässigen Blätter $\mathcal{L}_{\asymp_{(A,B)}}^-$.

Aufgrund der exponierten Bedeutung im Rahmen dieser Arbeit, versehen wir den Relationsbaum bzgl. einer Matrix-Galerkin-Blockrelation mit dem Namen *Matrix-Galerkin-Blockrelationsbaum*. Und einen Relationsbaum bzgl. einer — der dieser Blockrelation zugrundeliegenden — Matrix-Galerkin-Clusterrelation nennen wir *Matrix-Galerkin-Clusterrelationsbaum*.

Definition 4.3.1 (Matrix-Galerkin-Relationsbaum). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ zwei Matrizen, $\asymp_{(A,B)}$ die Matrix-Galerkin-Blockrelation bzgl. A und B in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie \asymp_A und \asymp_B die dieser Blockrelation zugrundeliegenden Matrix-Galerkin-Clusterrelationen, dann nennen wir den Relationsbaum $\mathcal{T}_{\asymp_{(A,B)}}$ auch Matrix-Galerkin-Blockrelationsbaum und die Relationsbäume \mathcal{T}_{\asymp_A} sowie \mathcal{T}_{\asymp_B} auch Matrix-Galerkin-Clusterrelationsbäume. Beziehen wir uns allgemein auf einen Matrix-Galerkin-Block- oder -Clusterrelationsbaum, dann schreiben wir auch Matrix-Galerkin-Relationsbaum.*

Durch den Übergang von den Koeffizientenmatrizen hin zu Clusterrelationen, ist das konkrete Aussehen der Clusterbasen zunächst unerheblich und wird erst für das Assemblieren des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems von Interesse sein. Dieser Abschnitt widmet sich nun der Beantwortung dreier wichtiger Fragen:

1. Ist das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem schwachbesetzt?
2. Lässt sich das Besetzmuster des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems mit asymptotisch linearer Komplexität bestimmen?
3. Lassen sich alle Koeffizientenmatrizen des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems mit asymptotisch linearer Komplexität berechnen?

Übersetzt in die Terminologie des Matrix-Galerkin-Blockrelationsbaums $\mathcal{T}_{\asymp_{(A,B)}}$ heißt dies:

- Zu 1. Existiert für $\mathcal{T}_{\asymp_{(A,B)}}$ — und damit auch $\mathcal{L}_{\asymp_{(A,B)}}^-$ — eine *Schwachbesetztheitskonstante* $C_{\text{sp}} \in \mathbb{N}$?
- Zu 2. Lässt sich $\mathcal{T}_{\asymp_{(A,B)}}$ — und damit auch $\mathcal{L}_{\asymp_{(A,B)}}^-$ — mit asymptotisch linearer Komplexität *aufstellen*?
- Zu 3. Lassen sich die Koeffizientenmatrizen für alle Elemente von $\mathcal{L}_{\asymp_{(A,B)}}^-$ mit asymptotisch linearer Komplexität *assemblieren*?

Diese Fragen werden in den nächsten drei Abschnitten nacheinander diskutiert.

Abbildung 4.1 verdeutlicht den Zusammenhang der in dieser Arbeit verwendeten Strukturen und Konzepte. Der Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ basiert auf den Clusterbäumen $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ und die Matrix-Galerkin-Blockrelation $\asymp_{(A,B)}$ basiert auf den Matrix-Galerkin-Clusterrelationen \asymp_A und \asymp_B . Dadurch ist der Relationsbaum $\mathcal{T}_{\asymp_{(A,B)}}$ eng mit den Relationsbäumen \mathcal{T}_{\asymp_A} und \mathcal{T}_{\asymp_B} verbunden. Diese Verbindungen sind Bestandteil des aktuellen Unterkapitels.

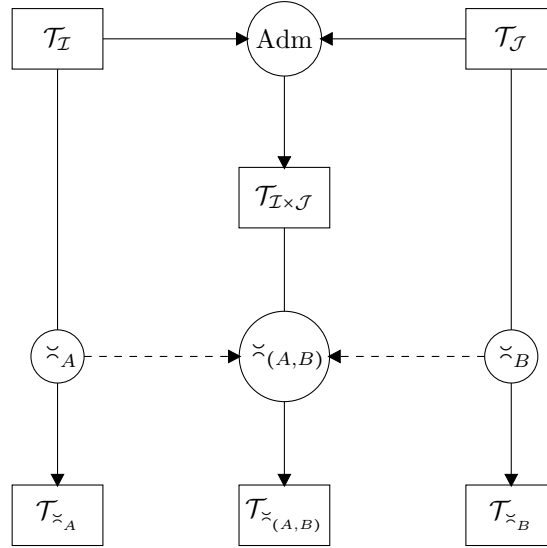


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung der Verbindung zwischen den Cluster- und Blockbäumen sowie den Matrix-Galerkin-Clusterrelationen \asymp_A bzw. \asymp_B und der Matrix-Galerkin-Blockrelation $\asymp_{(A,B)}$ für $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$.

Die Existenz einer Schwachbesetztheitskonstante von $\mathcal{T}_{\asymp_{(A,B)}}$ wird in Abschnitt 4.3.1 zu einem Großteil auf die Existenz solcher Konstanten für die Relationsbäume \mathcal{T}_{\asymp_A} und \mathcal{T}_{\asymp_B} zurückgeführt. Warum dies nur zum Teil gelingt und was „zum Teil“ genau heißt, wird an entsprechender Stelle konkretisiert.

Für die explizite — also algorithmisch umsetzbare — Konstruktion von $\mathcal{T}_{\asymp_{(A,B)}}$ bzw. der für uns eigentlich nur interessanten Menge $\mathcal{L}_{\asymp_{(A,B)}}^-$, wird in Abschnitt 4.3.2 gezeigt, dass allein die Informationen der Relationsbäume \mathcal{T}_{\asymp_A} und \mathcal{T}_{\asymp_B} hierfür ausreichen.

Abschnitt 4.3.3 beschäftigt sich dann mit dem Assemblieren des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems. Es wird dort gezeigt, dass sich der Hauptteil aller auftretenden Nicht-Null-Koeffizienten separat in \mathcal{T}_{\asymp_A} und \mathcal{T}_{\asymp_B} berechnen lässt. Eine Diskussion der nicht durch diese Relationsbäume abgedeckten Sonderfälle erfolgt an entsprechender Stelle.

Für einen Teil der Aussagen in den folgenden Abschnitten ist die konkrete Darstellung der verwendeten Clusterrelationen unerheblich. Diese Aussagen werden deshalb mög-

lichst allgemein gehalten und im Anschluss wird illustriert, wie sich diese im Kontext von Matrix-Galerkin-Cluster- bzw. -Blockrelationen darstellen. Diese allgemeine Herangehensweise hat zusätzlich den Vorteil, dass eine Aussage, für die lediglich eine vererbare Clusterrelation vorausgesetzt wird, auch für die transponierte Clusterrelation (vgl. Korollar 4.2.26) und damit für den transponierten Relationsbaum gilt (vgl. Lemma 4.2.28).

4.3.1 Schwachbesetztheit

Wir widmen uns nun der Schwachbesetztheit eines Relationsbaums \mathcal{T}_\sim , wobei \sim eine in einem Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ vererbare Blockrelation beschreibt.

Der Relationsbaum \mathcal{T}_\sim ist nach Definition ein Blockbaum im Sinne von Definition 3.2.1, womit sich das theoretische Grundgerüst des Unterkapitels 3.4 für die Untersuchung der Schwachbesetztheit anwenden lässt. Grundlage hierfür ist Satz 3.4.15 aus Abschnitt 3.4.1. Nach diesem Satz müssen für alle $b' \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ die Mengen

$$\text{row}^=(\mathcal{T}_\sim, b') = \{b \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \mid (b', b) \in \mathcal{T}_\sim \wedge \text{level}(b) = \text{level}(b')\}$$

sowie für alle $b \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ die Mengen

$$\text{col}^=(\mathcal{T}_\sim, b) = \{b' \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \mid (b', b) \in \mathcal{T}_\sim \wedge \text{level}(b') = \text{level}(b)\}$$

betrachtet werden, um die Existenz eines $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_\sim}^- \in \mathbb{N}$ mit

$$\#\text{row}^=(\mathcal{T}_\sim, b') \leq C_{\text{sp}, \mathcal{T}_\sim}^- \quad \text{und} \quad \#\text{col}^=(\mathcal{T}_\sim, b) \leq C_{\text{sp}, \mathcal{T}_\sim}^- \quad (4.27)$$

für alle $b', b \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ nachzuweisen. Des Weiteren sind die Größen

$$\begin{aligned} C_{U_1, \mathcal{T}_\sim} &= \max_{\substack{b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \\ b \in \text{row}^=(\mathcal{T}_\sim, b')}} \#U_1(\mathcal{T}_\sim, (b', b)) \\ \text{und} \quad C_{U_2, \mathcal{T}_\sim} &= \max_{\substack{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \\ b' \in \text{col}^=(\mathcal{T}_\sim, b)}} \#U_2(\mathcal{T}_\sim, (b', b)) \end{aligned}$$

zu untersuchen, wobei

$$\begin{aligned} U_1(\mathcal{T}_\sim, (b', b)) &= \{b^* \in \text{sons}^*(b) \mid (b', b^*) \in \mathcal{T}_\sim \setminus \mathcal{L}_\sim\} \\ \text{und} \quad U_2(\mathcal{T}_\sim, (b', b)) &= \{b'^* \in \text{sons}^*(b') \mid (b'^*, b) \in \mathcal{T}_\sim \setminus \mathcal{L}_\sim\} \end{aligned}$$

für alle $(b', b) \in \mathcal{T}_\sim$ gilt. Nach Lemma 3.4.21 bzw. Korollar 3.4.23 reicht es aus, hierfür die Werte

$$\begin{aligned} C_{L_1, \mathcal{T}_\sim} &= \max_{\substack{b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \\ b \in \text{row}^=(\mathcal{T}_\sim, b')}} L_1(\mathcal{T}_\sim, (b', b)) \\ \text{und} \quad C_{L_2, \mathcal{T}_\sim} &= \max_{\substack{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \\ b' \in \text{col}^=(\mathcal{T}_\sim, b)}} L_2(\mathcal{T}_\sim, (b', b)) \end{aligned}$$

abzuschätzen, wobei

$$L_1(\mathcal{T}_\sim, (b', b)) = \max_{b^* \in U_1(\mathcal{T}_\sim, (b', b))} \text{level}(b^*) - \text{level}(b')$$

$$\text{und } L_2(\mathcal{T}_\sim, (b', b)) = \max_{b'^* \in U_2(\mathcal{T}_\sim, (b', b))} \text{level}(b'^*) - \text{level}(b)$$

für alle $(b', b) \in \mathcal{T}_\sim$ gilt. Als erstes befassen wir uns mit der Betrachtung von $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_\sim}^=$ und diskutieren danach $C_{L_1, \mathcal{T}_\sim}$ sowie $C_{L_2, \mathcal{T}_\sim}$.

Betrachtung von $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_\sim}^=$

Wir werden nun zeigen, dass sich die Elemente eines Relationsbaums \mathcal{T}_\sim , bei denen sich Zeilen- und Spaltenblock auf demselben Level befinden, durch die Relationsbäume beschrieben werden können, die auf den \sim zugrundeliegenden Clusterrelationen $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^\sim$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}^\sim$ beruhen. Existiert dann für die beiden Relationsbäume $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^\sim$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}^\sim$ jeweils eine Schwachbesetztheitskonstante, dann lässt sich $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_\sim}^=$ für \mathcal{T}_\sim unter Verwendung dieser Konstanten beschränken.

Lemma 4.3.2 (Levelgleichheit). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^\sim$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}^\sim$ vererbte Clusterrelationen in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ bzw. $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ und \sim die Blockrelation bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^\sim$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}^\sim$, dann gelten*

$$(t', t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}^\sim \quad \text{und} \quad (s', s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}^\sim$$

für alle $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $(b', b) \in \mathcal{T}_\sim$ und $\text{level}(b') = \text{level}(b)$.

Beweis. Seien $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $(b', b) \in \mathcal{T}_\sim$ und $\ell := \text{level}(b') = \text{level}(b)$. Nach Lemma 3.2.6 (a) gilt

$$\text{level}(b') = \max\{\text{level}(t'), \text{level}(s')\} \quad \text{und} \quad \text{level}(b) = \max\{\text{level}(t), \text{level}(s)\},$$

also

$$\ell = \max\{\text{level}(t'), \text{level}(s')\} = \max\{\text{level}(t), \text{level}(s)\}.$$

Falls $\ell = 0$ gilt, folgt $b' = b = \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}})$ und damit $t' = t = \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})$ sowie $s' = s = \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}})$, also nach Konstruktion von $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^\sim$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}^\sim$ auch $(t', t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}^\sim$ und $(s', s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}^\sim$.

Sei nun $\ell > 0$ und zuerst $b' \sim b$. Dann gilt nach Definition $t' \mathcal{T}_{\mathcal{I}}^\sim t$ und $s' \mathcal{T}_{\mathcal{J}}^\sim s$. Für das Tupel (t', t) gilt dann einer der folgenden vier Fälle.

Fall 1: Es gilt $\text{level}(t') = \text{level}(t) = \ell$.

Es sind die Voraussetzungen des Charakterisierungslemmas 4.2.22 (i) erfüllt und es folgt $(t', t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}^\sim$.

Fall 2: Es gilt $\text{level}(t') < \text{level}(t) = \ell$.

Da in diesem Fall $\text{level}(t') < \text{level}(b')$ gilt, folgt mit Korollar 3.2.7 (a) $t' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$. Damit sind die Voraussetzungen des Charakterisierungslemmas 4.2.22 (iii) erfüllt und es folgt $(t', t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}^\sim$.

Fall 3: Es gilt $\ell = \text{level}(t') > \text{level}(t)$.

Da in diesem Fall $\text{level}(t) < \text{level}(b)$ gilt, folgt mit Korollar 3.2.7 (a) $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$. Damit sind die Voraussetzungen des Charakterisierungslemmas 4.2.22 (ii) erfüllt und es folgt $(t', t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}^-$.

Fall 4: Es gelten $\text{level}(t') < \ell$ und $\text{level}(t) < \ell$.

Es gilt dann $\text{level}(t') < \text{level}(b')$ und $\text{level}(t) < \text{level}(b)$, also wieder mit Korollar 3.2.7 (a) $t', t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und Korollar 4.2.23 liefert $(t', t) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}\sim}^- \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}^-$.

Es gilt somit $(t', t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}^-$ und für das Tupel (s', s) folgt mit einer analogen Fallunterscheidung und der Verwendung des Relationsbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{J}\sim}$ die Aussage $(s', s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}\sim}^-$.

Es gelte nun $b' \not\sim b$. Da $(b', b) \in \mathcal{T}_{\sim}$ und $\text{level}((b', b)) = \ell > 0$ gilt, existiert ein Vater von (b', b) in \mathcal{T}_{\sim} . Sei $(b'^+, b^+) \in \mathcal{T}_{\sim}$ dieser Vater, also $(b', b) \in \text{sons}((b'^+, b^+))$ und $b'^+ = (t'^+, s'^+), b^+ = (t^+, s^+) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Mit der Voraussetzung $\text{level}(b') = \text{level}(b)$ gilt nach Lemma 3.2.8 über die rekursive Darstellung des Vaters

$$(b'^+, b^+) = (\text{father}(b'), \text{father}(b)), \quad (4.28)$$

womit insbesondere $\text{level}(b'^+) = \text{level}(b^+)$ folgt. Des Weiteren muss (b'^+, b^+) unzulässig sein, da (b', b) ein Sohn von (b'^+, b^+) ist. Es gilt also $b'^+ \sim b^+$ und damit $t'^+ \sim_{\mathcal{I}} t^+$ sowie $s'^+ \sim_{\mathcal{J}} s^+$. Obige Diskussion in diesem Fall liefert nun

$$(t'^+, t^+) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}^- \quad \text{sowie} \quad (s'^+, s^+) \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}\sim}^-.$$

Nach (4.28) gilt $\text{sons}(b'^+) \neq \emptyset \neq \text{sons}(b^+)$ und damit $\text{sons}(b'^+) = \text{sons}^+(t'^+) \times \text{sons}^+(s'^+)$ sowie $\text{sons}(b^+) = \text{sons}^+(t^+) \times \text{sons}^+(s^+)$, also

$$(t', t) \in \text{sons}^+(t'^+) \times \text{sons}^+(t^+) \quad \text{sowie} \quad (s', s) \in \text{sons}^+(s'^+) \times \text{sons}^+(s^+).$$

Gilt $t'^+, t^+ \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, dann folgt $(t', t) = (t'^+, t^+) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}^- \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}$ und analog $(s', s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}\sim}$, falls $s'^+, s^+ \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$ gilt. Ansonsten folgt aus der Unzulässigkeit von (t'^+, t^+) sowie (s'^+, s^+) nach Konstruktion der Söhne $(t', t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}$ und $(s', s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}\sim}$, also insgesamt die zu beweisende Aussage. \square

Korollar 4.3.3 (Beschränktheit). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $\mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}\sim}$ vererbte Clusterrelationen in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ bzw. $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ und \sim die Blockrelation bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}\sim}$. Seien weiter $\mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim} \subseteq C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}\sim} \subseteq C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{J}\sim}}$ -schwachbesetzt, dann gelten für alle $b', b \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$*

$$\begin{aligned} \# \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b') &\leq C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{J}\sim}} \\ \text{und } \# \text{col}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b) &\leq C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{J}\sim}}. \end{aligned}$$

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

Beweis. Sei $b' = (t', s') \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, dann gilt nach Lemma 4.3.2

$$\begin{aligned} \text{row}^=(\mathcal{T}_\sim, b') &= \{b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \mid (b', b) \in \mathcal{T}_\sim \wedge \text{level}(b) = \text{level}(b')\} \\ &\subseteq \{b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \mid (t', t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim} \wedge (s', s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}\} \\ &\subseteq \text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, t') \times \text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}, s'), \end{aligned}$$

womit

$$\begin{aligned} \#\text{row}^=(\mathcal{T}_\sim, b') &\leq \# \left(\text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, t') \times \text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}, s') \right) \\ &= \# \text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, t') \# \text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}, s') \\ &\leq C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}} \end{aligned}$$

folgt. Analog gilt für $b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$

$$\begin{aligned} \text{col}^=(\mathcal{T}_\sim, b) &= \{b' = (t', s') \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \mid (b', b) \in \mathcal{T}_\sim \wedge \text{level}(b') = \text{level}(b)\} \\ &\subseteq \text{col}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, t) \times \text{col}(\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}, s) \end{aligned}$$

und damit auch

$$\#\text{col}^=(\mathcal{T}_\sim, b) \leq \# \text{col}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, t) \# \text{col}(\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}, s) \leq C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}}.$$

Es folgt die Aussage. □

Die Existenz von Schwachbesetztheitskonstanten für $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}$ reicht also aus, um $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_\sim}^=$ aus (4.27) zu beschränken.

Betrachtung von $C_{L_1, \mathcal{T}_\sim}$ und $C_{L_2, \mathcal{T}_\sim}$

Wir widmen uns nun der Untersuchung von $C_{L_1, \mathcal{T}_\sim}$ und $C_{L_2, \mathcal{T}_\sim}$. Betrachten wir als erstes $C_{L_1, \mathcal{T}_\sim}$. Hierfür muss für beliebige $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $b \in \text{row}^=(\mathcal{T}_\sim, b')$ der Wert

$$L_1(\mathcal{T}_\sim, (b', b)) = \max_{b^* \in U_1(\mathcal{T}_\sim, (b', b))} \text{level}(b^*) - \text{level}(b')$$

abgeschätzt werden. Der maximale Levelunterschied zwischen b' und einem Nachfahren von b , der zusammen mit b' einen unzulässigen Block in $\mathcal{T}_\sim \setminus \mathcal{L}_\sim$ bildet, darf also nicht zu groß werden. Da $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gilt, können die Fälle $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ und $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^-$ auftreten. Analog ergibt sich diese Fallunterscheidungen für $C_{L_2, \mathcal{T}_\sim}$. Dort könnte dann $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ oder $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^-$ gelten. Wir betrachten zuerst den Fall unzulässiger Blätter.

Lemma 4.3.4 (Beschränktheit). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}$ vererbhbare Clusterrelationen in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ bzw. $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ und \sim die Blockrelation bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}$, dann gilt*

(a) für alle $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^-$ und $b \in \text{row}^=(\mathcal{T}_\sim, b')$

$$L_1(\mathcal{T}_\sim, (b', b)) \leq \max \left\{ C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}}, C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}} \right\}$$

und

(b) für alle $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^-$ und $b' \in \text{col}^=(\mathcal{T}_\sim, b)$

$$L_2(\mathcal{T}_\sim, (b', b)) \leq \max \left\{ C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}}, C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}} \right\}.$$

Beweis. (a) Seien $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^-$ und $b \in \text{row}^=(\mathcal{T}_\sim, b')$. Gilt $U_1(\mathcal{T}_\sim, (b', b)) = \emptyset$, dann folgt nach Bemerkung 3.4.19 $L_1(\mathcal{T}_\sim, (b', b)) = -1$ und da $C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}} \geq -1$ sowie $C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}} \geq -1$ gelten, folgt die Aussage. Es gelte also $U_1(\mathcal{T}_\sim, (b', b)) \neq \emptyset$ und damit insbesondere $(b', b) \in \mathcal{T}_\sim \setminus \mathcal{L}_\sim$

Mit $b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^-$ folgt nach Konstruktion

$$t' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \quad \text{und} \quad s' \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}}.$$

Sei $b^* = (t^*, s^*) \in U_1(\mathcal{T}_\sim, (b', b))$, dann gilt $(b', b^*) \in \mathcal{T}_\sim \setminus \mathcal{L}_\sim$, was $b^* \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und damit

$$t^* \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \quad \text{oder} \quad s^* \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}} \quad (4.29)$$

zur Folge hat.

Da $b^* \in \text{sons}^*(b)$ nach Definition von $U_1(\mathcal{T}_\sim, (b', b))$ gilt, folgt $t^* \in \text{sons}^*(t')$ sowie $s^* \in \text{sons}^*(s')$. Falls $\text{level}(t^*) < \text{level}(t')$ gilt, bedeutet dies mit Lemma 3.2.6 (a)

$$\text{level}(t^*) < \max\{\text{level}(t'), \text{level}(s')\} = \text{level}(b') = \text{level}(b) \leq \text{level}(b^*).$$

Korollar 3.2.7 (a) liefert dann $t^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$. Analog folgt mit Lemma 3.2.6 (a) und Korollar 3.2.7 (b) $s^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$, falls $\text{level}(s^*) < \text{level}(s')$. Nach (4.29) gilt mit Kontraposition also

$$t^* \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \quad \text{und} \quad \text{level}(t') \leq \text{level}(t^*) \quad (4.30)$$

$$\text{oder} \quad s^* \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}} \quad \text{und} \quad \text{level}(s') \leq \text{level}(s^*). \quad (4.31)$$

Da $(b', b^*) \in \mathcal{T}_\sim \setminus \mathcal{L}_\sim$ gilt, ist (b', b^*) unzulässig, womit $b' \sim b^*$ und damit nach Definition

$$t' \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim} t^* \quad \text{sowie} \quad s' \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim} s^* \quad (4.32)$$

folgt. Gilt nun (4.30), so folgt mit $t' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ nach dem Charakterisierungslemma 4.2.22 (i) oder (iii) $(t', t^*) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}^-$. Der Block (t', t^*) ist also unzulässig und $t^* \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ liefert $(t', t^*) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \sim}$. Gilt (4.31), so folgt mit $s' \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$ analog $(s', s^*) \in \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{J} \sim}$. Es gilt also

$$\text{level}(t') \leq \text{level}(t^*) \quad \text{und} \quad (t', t^*) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \sim} \quad (4.33)$$

$$\text{oder} \quad \text{level}(s') \leq \text{level}(s^*) \quad \text{und} \quad (s', s^*) \in \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{J} \sim}. \quad (4.34)$$

Potentiell könnten auch beide Aussagen (4.33) und (4.34) gelten.

Fall 1: Es gilt $\text{level}(t') \leq \text{level}(t^*)$ mit $(t', t^*) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \sim}$.

Es existiert nun ein Vorfahre $t^{*+} \in \text{pred}(t^*)$ von t^* mit $\text{level}(t') = \text{level}(t^{*+})$ und nach Lemma 3.2.20 (a) gilt $(t', t^{*+}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \sim}$. Damit gilt dann $t^{*+} \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, t')$ und $t^* \in U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, (t', t^{*+}))$, was mit $t' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ nach Definition von $C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}}$

$$\text{level}(t^*) - \text{level}(t') \leq L_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, (t', t^{*+})) \leq C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}}$$

bedeutet.

Fall 2: Es gilt $\text{level}(s') \leq \text{level}(s^*)$ mit $(s', s^*) \in \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{J} \sim}$.

Auch hier existiert ein Vorfahre $s^{*+} \in \text{pred}(s^*)$ von s^* mit $\text{level}(s') = \text{level}(s^{*+})$ und auch in diesem Fall folgt $(s', s^{*+}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{J} \sim}$. Analog zu Fall 1 gilt $s^{*+} \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}, s')$ sowie $s^* \in U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}, (s', s^{*+}))$ und mit $s' \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$ folgt

$$\text{level}(s^*) - \text{level}(s') \leq L_1(\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}, (s', s^{*+})) \leq C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}}.$$

Gelten beide Aussage (4.33) und (4.34), so folgt mit den beiden obigen Fällen

$$\begin{aligned} \text{level}(b^*) &= \max\{\text{level}(t^*), \text{level}(s^*)\} \leq \max\left\{C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}} + \text{level}(t'), C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}} + \text{level}(s')\right\} \\ &\leq \max\left\{C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}}, C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}}\right\} + \max\{\text{level}(t'), \text{level}(s')\} \\ &= \max\left\{C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}}, C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}}\right\} + \text{level}(b'), \end{aligned}$$

also

$$\text{level}(b^*) - \text{level}(b') \leq \max\left\{C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}}, C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}}\right\}.$$

Ist nun die Aussage (4.33) falsch, dann gilt $\text{level}(t^*) < \text{level}(t')$ oder $(t', t^*) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \sim}$. Falls $\text{level}(t^*) < \text{level}(t')$ gilt, folgt $t^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ — vgl. oben im Beweis — und falls $(t', t^*) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \sim}$ gilt, folgt mit $t' \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \sim}$ (siehe (4.32)) $(t', t^*) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \sim}^-$, also ist (t', t^*) ein unzulässiges Blatt, womit auch in diesem Fall $t^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ folgt. Angenommen es gilt nun $\text{level}(s^*) < \text{level}(t^*)$, dann folgt nach Lemma 3.2.6 (c) auch $s^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$. Dies steht im Widerspruch dazu, dass (4.34) gelten muss, falls (4.33) nicht gilt. Es folgt also

$$\text{level}(t^*) \leq \text{level}(s^*)$$

und damit nach obigem Fall 2 — (4.34) muss hier gelten, da (4.33) als falsch angenommen — die Abschätzung

$$\begin{aligned} \text{level}(b^*) &= \max\{\text{level}(t^*), \text{level}(s^*)\} = \text{level}(s^*) \\ &\leq C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}} + \text{level}(s') \leq C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}} + \text{level}(b') \\ &\leq \max\left\{C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}}, C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}}\right\} + \text{level}(b'). \end{aligned}$$

Also folgt auch in diesem Fall

$$\text{level}(b^*) - \text{level}(b') \leq \max \left\{ C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim}, C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim} \right\}. \quad (4.35)$$

Analog lässt sich (4.35) beweisen, wenn (4.34) nicht, dafür aber (4.33) gilt. Hiermit ergibt sich die zu beweisende Aussage

$$L_1(\mathcal{T}_\sim, (b', b)) \leq \max \left\{ C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim}, C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim} \right\}.$$

(b) Seien $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^-$ und $b' \in \text{col}(\mathcal{T}_\sim, b)$. Da \sim die Blockrelation bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim$ ist und diese beiden Clusterrelationen vererbbar sind, ist auch \sim vererbbar (siehe Korollar 4.2.26). Damit ist \mathcal{T}_{\sim^T} nach Lemma 4.2.28 der zu \mathcal{T}_\sim transponierte Blockbaum und zusammen mit Korollar 3.2.25 bedeutet dies

$$b' \in \text{col}(\mathcal{T}_\sim, b) = \text{row}(\mathcal{T}_\sim^T, b) = \text{row}(\mathcal{T}_{\sim^T}, b).$$

Lemma 4.2.28 liefert außerdem die Gleichheit der Relationsbäume $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^T \sim$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim^T}$ sowie $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}^T \sim$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim^T}$. Des Weiteren sind $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim^T$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim^T$ nach Korollar 4.2.26 vererbbar, da dies für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim$ vorausgesetzt ist. Mit Korollar 4.2.27 ist \sim^T die Blockrelation bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim^T$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim^T$. Nach Teil (a) dieses Lemmas folgt dann

$$L_1(\mathcal{T}_{\sim^T}, (b, b')) \leq \max \left\{ C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim^T}, C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim^T} \right\} \quad (4.36)$$

und nach Korollar 3.4.20 gelten

$$C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim} \stackrel{3.4.20}{=} C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}^T \sim} \stackrel{4.2.28}{=} C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim^T}$$

und

$$C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim} \stackrel{3.4.20}{=} C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{J}}^T \sim} \stackrel{4.2.28}{=} C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim^T}$$

sowie

$$L_2(\mathcal{T}_\sim, (b', b)) \stackrel{3.4.20}{=} L_1(\mathcal{T}_\sim^T, (b, b')) \stackrel{4.2.28}{=} L_1(\mathcal{T}_{\sim^T}, (b, b')).$$

Mit (4.36) ergibt sich also insgesamt die zu beweisende Aussage

$$L_2(\mathcal{T}_\sim, (b', b)) \leq \max \left\{ C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim}, C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim} \right\}.$$

□

Wir haben in diesem Lemma ausgenutzt, dass unzulässige Blätter betrachtet wurden und dort sowohl Zeilen- als auch Spaltencluster Blätter sind. Diese Eigenschaft bedeutet, dass wir uns auf einer relativ hohen Stufe in den entsprechenden Clusterbäumen

befinden und sich dort der zu betrachtende Levelunterschied mit den Werten $C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim}$ und $C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim}$ bzw. $C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim}$ und $C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim}$ beschreiben lässt. Existiert für die Relationsbäume $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim$ jeweils eine Schwachbesetztheitskonstante, dann lassen sich nach Bemerkung 3.4.24 die oben genannten Werte unabhängig von $\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$ beschränken.

Wie schon für die Diskussion der Mengen $\text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b')$ und $\text{col}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b)$ für alle $b', b \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gesehen, kann also auch die Betrachtung von $L_1(\mathcal{T}_{\sim}, (b', b))$ für $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^-$ und $b \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b')$ sowie die Betrachtung von $L_2(\mathcal{T}_{\sim}, (b', b))$ für $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^-$ und $b' \in \text{col}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b)$ auf die Bäume $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim$ zurückgeführt werden.

Bemerkung 4.3.5 (Zulässige Blätter). *Da das Vorliegen unzulässiger Blätter fundamental für den Beweis von Lemma 4.3.4 ist, bleibt der Fall zulässiger Blätter $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ bzw. $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ zu betrachten. Die obige Diskussion lässt sich dann nicht auf die gleiche Weise führen, da die zulässigen Blätter relativ „grob“ sein können. „Grob“ bedeutet hier, das sowohl Zeilen- als auch Spaltencluster eines solchen Blocks potentiell einen niedrigen Level aufweisen und damit noch weiter rekursiv unterteilt sein können. Die genaue Beschaffenheit dieser Cluster, die auf einer „groben“ Stufe zusammen einen zulässigen Block bilden, ist stark von der zugrundeliegenden Zulässigkeitsbedingung und der Konstruktion der Clusterbäume $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ sowie $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ abhängig. Diese Diskussion wird deswegen in Kapitel 6 für die konkreten Anwendungen geführt und es wird dort gezeigt, wie sich $C_{L_1, \mathcal{T}_{\sim}}$ und $C_{L_2, \mathcal{T}_{\sim}}$ für $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ bzw. $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ abschätzen lassen.*

Bemerkung 4.3.6 (Matrix-Galerkin-Blockrelationsbaum). *Für einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ sowie die Matrix-Galerkin-Blockrelation $\succ_{(A,B)}$ bzgl. A und B in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sind die dieser Blockrelation zugrundeliegenden Clusterrelationen \succ_A und \succ_B nach Korollar 4.2.17 vererbbar. Damit sind die Aussagen aus Lemma 4.3.2, Korollar 4.3.3 und Lemma 4.3.4 auf den Matrix-Galerkin-Blockrelationsbaum $\mathcal{T}_{\succ_{(A,B)}}$ anwendbar. Ein Teil des Nachweises für die Existenz einer Schwachbesetztheitskonstante von $\mathcal{T}_{\succ_{(A,B)}}$ lässt sich damit über die Matrix-Galerkin-Clusterrelationsbäume \mathcal{T}_{\succ_A} und \mathcal{T}_{\succ_B} argumentieren. Neben der in Bemerkung 4.3.5 beschriebenen, gesonderten Betrachtung zulässiger Blätter aus $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ist in den entsprechenden Anwendungen somit das Vorhandensein von Schwachbesetztheitskonstanten für \mathcal{T}_{\succ_A} und \mathcal{T}_{\succ_B} zu untersuchen.*

4.3.2 Aufstellen

Wir betrachten in diesem Abschnitt wieder einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, zwei vererbbare Clusterrelationen $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim$ sowie die zugehörige Blockrelation \sim . Das Interesse liegt nun auf der Konstruktion eines Algorithmus, der die Menge \mathcal{L}_{\sim}^- der unzulässigen Blätter des Relationsbaums \mathcal{T}_{\sim} aufstellt. Wie auch schon im vorherigen Abschnitt, wird die Diskussion allgemein geführt und es werden die entsprechenden Aussagen dann auf den speziellen Fall von Matrix-Galerkin-Blockrelationen übertragen.

Bei der Analyse der Schwachbesetztheit von \mathcal{T}_{\sim} wurde ein Großteil der Eigenschaften dieses Baums auf Eigenschaften der Relationsbäume $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim$ zurückgeführt. Im Folgenden wird ein Algorithmus motiviert, definiert und analysiert, der die Menge \mathcal{L}_{\sim}^-

nur anhand der Informationen der Teilmengen $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^- \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}^- \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim$ aufstellt. Anschließend folgt die Definition eines Algorithmus, mit dem sich $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^-$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}^-$ beim Vorliegen von Matrix-Galerkin-Clusterrelationen konstruieren lassen.

Ein allgemeiner Ansatz zur Konstruktion von \mathcal{L}_{\sim}^- ist in Algorithmus 4.3.1 dargestellt. Dieser entspricht vom Aufbau dem Algorithmus 3.2.1 zum Aufstellen eines minimal zulässigen Blockbaums, konstruiert aber nur die — für unsere Zwecke interessante — Menge aller unzulässigen Blätter. Zusätzlich ist Algorithmus 4.3.1 in drei potentiell auftretende Fälle unterteilt. Die Funktion `INADMISSIBLE_LEAF_GENERAL` ruft sich mit den entsprechenden Söhnen solange rekursiv auf, bis ggf. einer der beiden Blöcke ein Blatt des Blockbaums ist. In diesem Fall wird dann entweder Algorithmus 4.3.2 — falls der Zeilenblock ein Blatt ist — oder Algorithmus 4.3.3 — falls der Spaltenblock ein Blatt ist — aufgerufen. Diese Unterteilung wurde an dieser Stelle so vorgenommen, da sie für die im Folgenden vorgestellte Variante zur Konstruktion von \mathcal{L}_{\sim}^- benötigt wird.

Wie vorher schon erwähnt (vgl. Bemerkung 4.2.20) ist ein kritischer Punkt beim Aufstellen von zulässigen Blockbäumen die Auswertung der Zulässigkeitsbedingung. Da hier nur die *unzulässigen* Blätter eines Blockbaums von Interesse sind, wird die Zulässigkeitsbedingung zu einer *Unzulässigkeitsbedingung*.

Für zwei Blöcke $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gilt nach Definition eines Blockrelationsbaums

$$(b', b) \text{ unzulässig} \quad \Leftrightarrow \quad (t' \mathrel{\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim} t \wedge s' \mathrel{\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim} s). \quad (4.37)$$

Übersetzt in die Sprache von Clusterrelationsbäumen bedeutet dies

$$(t', t) \text{ unzulässig} \quad \text{und} \quad (s', s) \text{ unzulässig}.$$

Dieser Zusammenhang motiviert die Betrachtung der Mengen $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^-$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}^-$ zur Auswertung von (4.37), also der Überprüfung auf Unzulässigkeit eines Blocktupels.

Es stellt sich somit die

Frage: Reichen die Mengen $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^-$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}^-$ allein aus, um \mathcal{T}_{\sim}^- zu durchlaufen und \mathcal{L}_{\sim}^- zu bestimmen?

Um eine Antwort auf diese *Frage* zu bekommen, betrachten wir zunächst das Charakterisierungslemma 4.2.22. Durch dieses Lemma wissen wir, dass für $t', t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ aus (t', t) *unzulässig* — also $t' \mathrel{\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim} t$ — nicht automatisch $(t', t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}^-$ folgt. Es muss zusätzlich eine der drei dort angegebenen Bedingungen (i), (ii) oder (iii) erfüllt sein.

Zur Veranschaulichung betrachten wir exemplarisch die Abbildung 4.2. Es gelte dort $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit

$$(b', b) \in \mathcal{L}_{\sim}^- \quad \text{und} \quad \text{level}(b) = \text{level}(b') + 1$$

sowie

$$\text{level}(t') < \text{level}(t) \text{ mit } t' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \quad \text{und} \quad \text{level}(s') < \text{level}(s) \text{ mit } s' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}}.$$

Algorithmus 4.3.1 Aufstellen der Menge \mathcal{L}_{\sim}^- (allgemein)

```

procedure INADMISSIBLE_LEAF_GENERAL( $b', b$ )
  if ( $b', b$ ) unzulässig then
    if  $\text{sons}(b') = \emptyset = \text{sons}(b)$  then
       $\mathcal{L}_{\sim}^- \leftarrow \mathcal{L}_{\sim}^- \cup \{(b', b)\}$ 
    else if  $\text{sons}(b') = \emptyset$  then
      INADMISSIBLE_ROW_LEAF_GENERAL( $b', b$ ) ▷ Algorithmus 4.3.2
    else if  $\text{sons}(b) = \emptyset$  then
      INADMISSIBLE_COL_LEAF_GENERAL( $b', b$ ) ▷ Algorithmus 4.3.3
    else
      for all ( $b'^*, b^*$ )  $\in \text{sons}(b') \times \text{sons}(b)$  do
        INADMISSIBLE_LEAF_GENERAL( $b'^*, b^*$ )
      end for
    end if
  end if
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Wie in Algorithmus 3.2.1 geschieht hier der initiale Aufruf mit der der Wurzel von \mathcal{T}_{\sim} , also

$$\text{root}(\mathcal{T}_{\sim}) = (\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}), \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}})).$$

Zu Beginn gilt $\mathcal{L}_{\sim}^- = \emptyset$. Ein Block (b', b) wird nach Vorschrift (3.5) unterteilt wenn er unzulässig ist und der Algorithmus mit den entsprechenden Söhnen rekursiv aufgerufen. Ist b' ein Blatt und b nicht, so wird Algorithmus 4.3.2 aufgerufen. Analog übernimmt Algorithmus 4.3.3 den Fall, wenn b ein Blatt ist und b' nicht. Da zulässige Blöcke nicht von Interesse sind, werden diese ignoriert. Ist sowohl b' , als auch b ein Blatt des Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, wird (b', b) zur Menge der unzulässigen Blätter \mathcal{L}_{\sim}^- hinzugefügt.

Algorithmus 4.3.2 Aktualisierung der Menge \mathcal{L}_{\sim}^- für $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ (allgemein)

```

procedure INADMISSIBLE_ROW_LEAF_GENERAL( $b', b$ )
  if ( $b', b$ ) unzulässig then
    if sons( $b$ ) =  $\emptyset$  then
       $\mathcal{L}_{\sim}^- \leftarrow \mathcal{L}_{\sim}^- \cup \{(b', b)\}$ 
    else
      for all  $b^* \in \text{sons}(b)$  do
        INADMISSIBLE_ROW_LEAF_GENERAL( $b', b^*$ )
      end for
    end if
  end if
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Der Aufruf dieses Algorithmus geschieht aus Algorithmus 4.3.1 in dem Fall von sons(b') = \emptyset . Ist b kein Blatt, so wird der Algorithmus mit den Söhnen von b rekursiv aufgerufen. Dies geschieht so lange, bis auch b ein Blatt ist und dann (b', b) ggf. zu der Menge \mathcal{L}_{\sim}^- hinzugefügt.

Algorithmus 4.3.3 Aktualisierung der Menge \mathcal{L}_{\sim}^- für $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ (allgemein)

```

procedure INADMISSIBLE_COL_LEAF_GENERAL( $b', b$ )
  if ( $b', b$ ) unzulässig then
    if sons( $b'$ ) =  $\emptyset$  then
       $\mathcal{L}_{\sim}^- \leftarrow \mathcal{L}_{\sim}^- \cup \{(b', b)\}$ 
    else
      for all  $b'^* \in \text{sons}(b')$  do
        INADMISSIBLE_COL_LEAF_GENERAL( $b'^*, b$ )
      end for
    end if
  end if
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Der Aufruf dieses Algorithmus geschieht aus Algorithmus 4.3.1 in dem Fall von sons(b) = \emptyset . Ist b' kein Blatt, so wird der Algorithmus mit den Söhnen von b' rekursiv aufgerufen. Dies geschieht so lange, bis auch b' ein Blatt ist und dann (b', b) ggf. zu der Menge \mathcal{L}_{\sim}^- hinzugefügt.

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

Nach dem Charakterisierungslemma 4.2.22 folgt dann

$$(t', t) \notin \mathcal{T}_{\mathcal{I}}^- \quad \text{und} \quad (s', s) \notin \mathcal{T}_{\mathcal{J}}^-.$$

Analog ergibt sich diese Aussage bei Vertauschung der Rollen von b' und b , wenn also $\text{level}(t') > \text{level}(t)$ mit $t \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $\text{level}(s') > \text{level}(s)$ mit $s \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$ gilt.

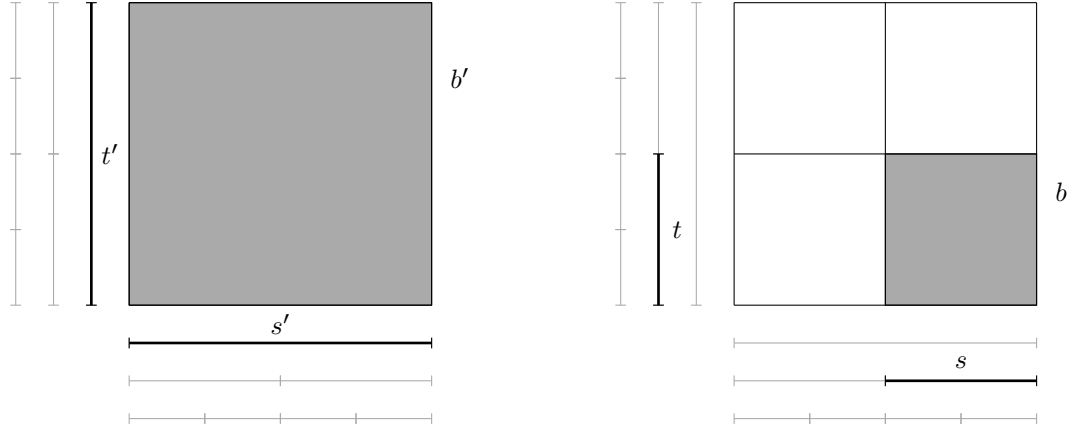


Abbildung 4.2: Kombination zweier Blöcke $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $(b', b) \in \mathcal{L}_{\sim}^-$, für die $(t', t) \notin \mathcal{T}_{\mathcal{I}}^-$ und $(s', s) \notin \mathcal{T}_{\mathcal{J}}^-$ gilt.

Das Auftreten des hier beschriebenen Falls liegt in dem Vorhandensein zulässiger Blätter $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ im Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ begründet. Für diese müssen nach Konstruktion weder Zeilen- noch Spaltencluster Blätter des entsprechenden Clusterbaums sein.

Bemerkung 4.3.7 (Zulässige Blätter). *Bei genauerer Betrachtung verwundert der hier beschriebene „fehlende Zusammenhang“ zwischen \mathcal{T}_{\sim}^- und $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^-$ bzw. $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}^-$ nicht, da die Verbindung von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ — die Zulässigkeitsbedingung Adm (vgl. Abbildung 4.1) — zu diesem Zeitpunkt völlig außer Acht gelassen wurde.*

Genau aus diesem Grund war es in Abschnitt 4.3.1 auch vorerst nicht möglich, eine Aussage über $C_{L_1, \mathcal{T}_{\sim}}$ und $C_{L_2, \mathcal{T}_{\sim}}$ beim Vorliegen zulässiger Blöcke zu treffen (vgl. Bemerkung 4.3.5). Diese unterliegen der konkreten Zulässigkeitsbedingung und können deswegen nicht losgelöst davon betrachtet werden.

Im Folgenden wird nun eine Vorgehensweise illustriert, die es auch in dem Beispiel aus Abbildung 4.2 ermöglicht, anhand von $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^-$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}^-$ über die Unzulässigkeit von (b', b) zu entscheiden. Aufgrund der Vererbbarkeit von $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^-$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}^-$ wissen wir, dass $t' \mathcal{T}_{\mathcal{I}}^- t$ und $s' \mathcal{T}_{\mathcal{J}}^- s$ genau dann gelten, wenn $t'^* \in \text{sons}^+(t')$ und $s'^* \in \text{sons}^+(s')$ mit $t'^* \mathcal{T}_{\mathcal{I}}^- t$ und $s'^* \mathcal{T}_{\mathcal{J}}^- s$ existieren. Dies bedeutet, dass die Äquivalenz

$$b' \sim b \quad \Leftrightarrow \quad \exists(t'^*, s'^*) \in \text{sons}^+(t') \times \text{sons}^+(s') : \left(t'^* \mathcal{T}_{\mathcal{I}}^- t \wedge s'^* \mathcal{T}_{\mathcal{J}}^- s \right) \quad (4.38)$$

gilt. Es ergibt sich die Situation aus Abbildung 4.3 für das Beispiel aus Abbildung 4.2. Dort seien $t'^* \in \text{sons}^+(t')$ und $s'^* \in \text{sons}^+(s')$ die nach (4.38) existierenden Söhne von t' und s' mit $t'^* \tau_{\mathcal{I}} \sim t$ und $s'^* \tau_{\mathcal{J}} \sim s$. In diesem Fall gilt aufgrund von $\text{level}(b) = \text{level}(b') + 1$ auch

$$\text{level}(t'^*) = \text{level}(t) \quad \text{sowie} \quad \text{level}(s'^*) = \text{level}(s)$$

und damit nach dem Charakterisierungslemma 4.2.22

$$(t'^*, t) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}}}^- \quad \text{sowie} \quad (s'^*, s) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{J}}}^-.$$

Dank der Äquivalenz in (4.38) können wir anhand der Tupel (t'^*, t) und (s'^*, s) über $\mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}}}^-$ und $\mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{J}}}^-$ feststellen, dass $b' \sim b$ und damit $(b', b) \in \mathcal{L}_{\sim}^-$ gilt.

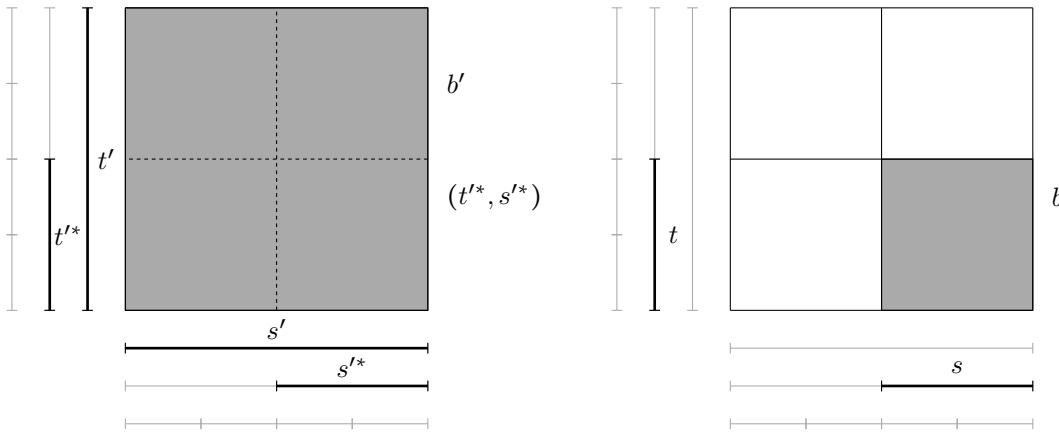


Abbildung 4.3: Kombination zweier Blöcke $b' = (t', s')$, $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, für die $(b', b) \in \mathcal{L}_{\sim}^-$ anhand von $(t'^*, t) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}}}^-$ und $(s'^*, s) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{J}}}^-$ festgestellt werden kann.

In Abbildung 4.4 betrachten wir eine weitere Stufe des Baums. Es gelte dort $b = (t, s) \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $b^* = (t^*, s^*) \in \text{sons}(b)$ mit $b^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie $b' \sim b^*$. Der Block $b^+ = (t^+, s^+) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ bezeichne den Vater von b und es gelte $\text{level}(b') = \text{level}(b^+)$. Wir verfahren wie in Abbildung 4.3 und stellen anhand von

$$(t'^*, s'^*) \in \text{sons}^+(t') \times \text{sons}^+(s') \quad \text{mit} \quad t'^* \tau_{\mathcal{I}} \sim t \quad \text{und} \quad s'^* \tau_{\mathcal{J}} \sim s \quad (4.39)$$

fest, dass $b' \sim b$ gilt. Da $b \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gilt, verfahren wir mit (t'^*, s'^*) und $b^* = (t^*, s^*)$ analog und finden dank der Vererbbarkeit von $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ sowie $\tau_{\mathcal{J}} \sim$

$$(t'^{**}, s'^{**}) \in \text{sons}^+(t'^*) \times \text{sons}^+(s'^*) \quad \text{mit} \quad t'^{**} \tau_{\mathcal{I}} \sim t'^* \quad \text{und} \quad s'^{**} \tau_{\mathcal{J}} \sim s'^*. \quad (4.40)$$

Es ist somit das Blatt $b^* = (t^*, s^*)$ erreicht und wir können uns nun mit der Vererbbarkeit wieder zu den Vorfahren von (t'^{**}, s'^{**}) bewegen. Damit folgen aus (4.40) $t'^{**} \tau_{\mathcal{I}} \sim t^*$ und

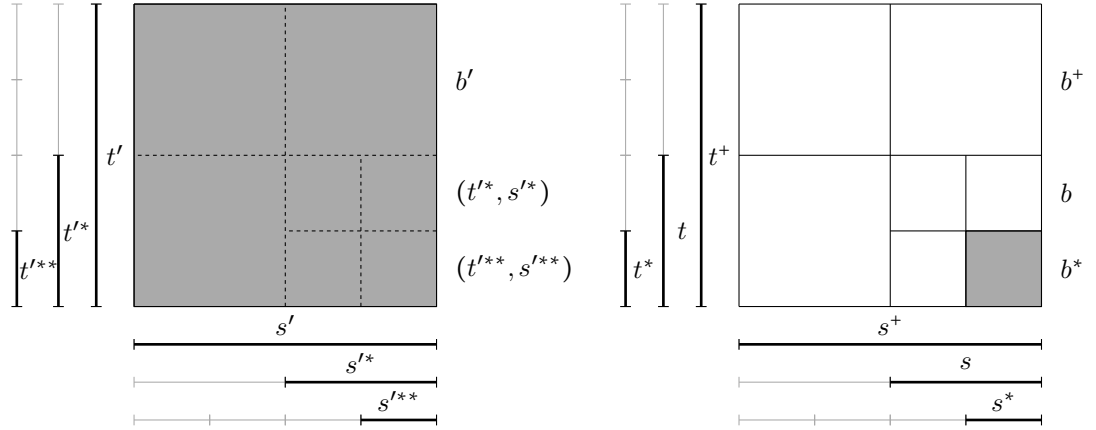


Abbildung 4.4: Kombination zweier Blöcke $b' = (t', s')$, $b^* = (t^*, s^*) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, für die $(b', b^*) \in \mathcal{L}_{\sim}^-$ anhand von $(t'^{**}, t^*) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}^-$ und $(s'^{**}, s^*) \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}^-$ festgestellt werden kann.

$s'^* \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim s^*$ sowie aus demselben Argument auch $t' \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t^*$ und $s' \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim s^*$. Dies führt auf $b' \sim b^*$, also genau zu der gewünschten Information. Aufgrund der Levelgleichheit der betrachteten Cluster in (4.39) und (4.40), befinden sich die Tupel (t^*, t) und (t'^{**}, t^*) sowie (s'^*, s) und (s'^{**}, s^*) in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^-$ bzw. $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}^-$ (vgl. Charakterisierungslemma 4.2.22).

Die hier betrachteten Beispiele lassen sich auch auf den Fall übertragen, dass Cluster, die weiter unterteilt werden müssten, Blätter des entsprechenden Clusterbaums sind. Dort gilt dann entweder Bedingung (ii) oder (iii) des Charakterisierungslemmas 4.2.22.

An Lemma 4.3.2 ist zu erkennen, dass die Auswertung der (Un-)Zulässigkeitsbedingung für zwei Blöcke auf gleichem Level unproblematisch ist — also keine künstliche Unterteilung zulässiger Blätter nötig wird —, da die Informationen direkt in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^-$ bzw. $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}^-$ zu finden sind. Eine genaue Analyse allgemein auftretender Fälle steht zwar noch aus, es lässt sich an dieser Stelle aber vorwegnehmen, dass sich für die oben gestellte *Frage* die

Antwort: Ja

ergibt.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit liegt der Fokus bei der Gestaltung aller Algorithmen immer auf der Realisierung der zu bewerkstelligenden Aufgabe mit einem in der Anzahl der Freiheitsgrade — also $\#\mathcal{I}$, $\#\mathcal{J}$ oder $(\#\mathcal{I} + \#\mathcal{J})$ — asymptotisch linearen Aufwand. In Anlehnung an die Definition 4.1.10 des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems verwenden wir im Folgenden die (block-)zeilenweise Darstellung der Mengen \mathcal{L}_{\sim}^- sowie $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^-$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}^-$. Da zulässige Blöcke für unsere Betrachtungen nicht von Interesse sind, führen wir nachstehend den Begriff der *unzulässigen Blockzeile* ein. Analog ließen sich hier auf gleiche Weise unzulässige Blockspalten definieren und in der weiteren Diskussion verwenden.

Definition 4.3.8 (Unzulässige Blockzeile). Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, dann bezeichnen wir für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ die Menge

$$\text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) := \{s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \mid (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^-\}$$

als unzulässige Blockzeile von t in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Für alle $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ definieren wir zusätzlich

$$\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) := \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{J}}.$$

Geht aus dem Zusammenhang klar hervor welcher Blockbaum zugrundeliegt, vernachlässigen wir den Zusatz „in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ “.

Wir untersuchen die Mengen aus Definition 4.3.8 nun für Relationsbäume.

Korollar 4.3.9 (Transponierte Relation). Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ eine Clusterrelation in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}$ der zugehörige Relationsbaum, dann gilt für alle $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit der transponierten Clusterrelation $\tau_{\mathcal{I}} \sim^T$

$$q \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}, p) \quad \text{genau dann, wenn} \quad p \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim^T}, q).$$

Beweis. Seien $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$.

„ \Rightarrow “: Es gelte $q \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}, p)$, dann gilt $(p, q) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}$ und die Unzulässigkeit liefert $p \tau_{\mathcal{I}} \sim q$. Mit dem transponierten Relationsbaum folgt $(q, p) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^T$ und nach Lemma 4.2.28 ist der transponierte Relationsbaum der Relationsbaum zur transponierten Relation, womit $(q, p) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim^T}$ folgt. Aus $p \tau_{\mathcal{I}} \sim q$ ergibt sich nach Definition $q \tau_{\mathcal{I}} \sim^T p$, also $(q, p) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim^T}^-$ und damit $p \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim^T}, q)$.

„ \Leftarrow “: Da $\tau_{\mathcal{I}} \sim^T$ die zu $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ transponierte Clusterrelation ist, ist $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ auch die zu $\tau_{\mathcal{I}} \sim^T$ transponierte Clusterrelation. Damit lässt sich diese Implikation analog zur vorherigen mit vertauschten Rollen von $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ und $\tau_{\mathcal{I}} \sim^T$ beweisen. \square

Das folgende Korollar verdeutlicht, dass sich alle unzulässigen Blöcke über die Gesamtheit aller unzulässigen Blockzeilen darstellen lassen und der Zugriff auf die Elemente dieser Blockzeilen — bei entsprechender Implementierung — unter der Annahme der Existenz einer Schwachbesetztheitskonstante für den betrachteten Relationsbaum mit einem konstanten Aufwand realisierbar ist.

Korollar 4.3.10 (Unzulässige Blockzeile). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ eine Clusterrelation in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}$ der zugehörige Relationsbaum.

(a) Es gelten

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^- &= \bigcup_{p \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} \{(p, q) \mid q \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}, p)\} \\ \text{und } \mathcal{L}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^- &= \bigcup_{p \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}} \{(p, q) \mid q \in \text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}, p)\}. \end{aligned}$$

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

(b) Ist $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}}$ -schwachbesetzt, dann folgt

$$\# \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, p) \leq C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}} \quad \text{für alle } p \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}.$$

Beweis. (a) Für alle $(p, q) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}^-$ gilt $p \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und nach Definition der unzulässigen Blockzeile auch $q \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, p)$. Seien nun $p \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $q \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, p)$, dann gilt wieder nach Definition $(p, q) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}^-$ und somit die erste Mengengleichheit.

Für alle $(p, q) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \sim}^-$ gilt nach Konstruktion $p, q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und mit $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \sim}^- \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}^-$ nach Definition der unzulässigen Blockzeile

$$q \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, p) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{I}} = \text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, p).$$

Sei nun $p \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $q \in \text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, p)$, dann gilt $q \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, p)$ und $q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$. Damit folgt $(p, q) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}^-$ und $p, q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ liefert $(p, q) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \sim}^-$, also die zweite Mengengleichheit.

(b) Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}}$ -schwachbesetzt, dann gilt für alle $p \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$

$$\# \text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, p) \leq C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}}$$

sowie

$$\begin{aligned} \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, p) &= \{q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \mid (p, q) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}^-\} \\ &\subseteq \{q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \mid (p, q) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}\} = \text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, p), \end{aligned}$$

also die Aussage. □

Die durch die Abbildungen 4.2, 4.3 und 4.4 exemplarisch illustrierte Vorgehensweise zur Konstruktion der Menge \mathcal{L}_{\sim}^- führt in Zusammenhang mit der durch Korollar 4.3.10 motivierten Verwendung der unzulässigen Blockzeilen zur Auswertung der (Un-)Zulässigkeitsbedingung auf Algorithmus 4.3.4.

Algorithmus 4.3.4, 4.3.5 und 4.3.6 entsprechen den Algorithmen 4.3.1, 4.3.2 bzw. 4.3.3, wobei hier neben der konkreten Auswertung der (Un-)Zulässigkeitsbedingung die Darstellung der Menge \mathcal{L}_{\sim}^- über unzulässige Blockzeilen verwendet wurde. Abbildung 4.5 verdeutlicht die Vorgehensweise des Algorithmus 4.3.5 anhand eines Beispiels. Es gelte dort $b'_0 = (t'_0, s'_0) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $b_0 = (t_0, s_0) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $\text{level}(b'_0) = \text{level}(b_0)$ sowie $b_3 = (t_3, s_3) \in \text{sons}^*(b_0)$ mit $b_3 \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $b'_0 \sim b_3$. Es ist zu erkennen, wie b'_0 im Zuge des Algorithmus in *künstliche Söhne* unterteilt wird, um anhand dieser (rekursiv) $b'_0 \sim b_3$ festzustellen.

Wir widmen uns nun der theoretischen Analyse der zuvor definierten Algorithmen. Hierzu führen wir nachstehend zwei Clusterbäume sowie einen auf diesen basierenden Blockbaum — *Auswertungsbaum* genannt — ein und werden verdeutlichen, wie sich die Algorithmen 4.3.5 und 4.3.6 jeweils durch einen solchen Auswertungsbaum beschreiben lassen.

Algorithmus 4.3.4 Aufstellen der Menge \mathcal{L}_{\sim}^- .

```

procedure INADMISSIBLE_LEAF( $b', b$ )
  ( $t', s'$ )  $\leftarrow b'$ , ( $t, s$ )  $\leftarrow b$ 
  if  $t \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}, t')$  and  $s \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{J}\sim}, s')$  then
    if  $\text{sons}(b') = \emptyset = \text{sons}(b)$  then
       $\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b') \leftarrow \text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b') \cup \{b\}$ 
    else if  $\text{sons}(b') = \emptyset$  then
      INADMISSIBLE_ROW_LEAF( $b', (t', s'), b$ ) ▷ Algorithmus 4.3.5
    else if  $\text{sons}(b) = \emptyset$  then
      INADMISSIBLE_COL_LEAF( $b, (t, s), b'$ ) ▷ Algorithmus 4.3.6
    else
      for all  $(b'^*, b^*) \in \text{sons}(b') \times \text{sons}(b)$  do
        INADMISSIBLE_LEAF( $b'^*, b^*$ )
      end for
    end if
  end if
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Der initiale Aufruf geschieht mit der Wurzel von \mathcal{T}_{\sim} , also

$$\text{root}(\mathcal{T}_{\sim}) = (\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}), \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}})).$$

Solange $b' = (t', s')$ und $b = (t, s)$ keine Blätter des Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sind und $b' \sim b$ gilt, wird der Algorithmus mit den entsprechenden Söhnen rekursiv aufgerufen. Ob $b' \sim b$ gilt, wird unter Zuhilfenahme von $\mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}^-$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}\sim}^-$ in Form von $\text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}, t')$ und $\text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{J}\sim}, s')$ entschieden. Sind beide Blöcke Elemente von $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und (b', b) unzulässig, so wird die Menge \mathcal{L}_{\sim}^- über $\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b')$ aktualisiert.

Tritt der Fall auf, dass b' ein Blatt ist, b aber noch weiter unterteilt, wird Algorithmus 4.3.5 aufgerufen, welcher hier die Menge \mathcal{L}_{\sim}^- bzw. $\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b')$ ggf. erweitert. Analog übernimmt Algorithmus 4.3.6 den Fall, wenn b ein Blatt ist und b' nicht.

Algorithmus 4.3.5 Aktualisierung der Menge \mathcal{L}_{\sim}^- für $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.

```

procedure INADMISSIBLE_ROW_LEAF( $b', (t^*, s^*), b^*$ )
   $(t^*, s^*) \leftarrow b^*$ 
  if  $t^* \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}, t^*)$  and  $s^* \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{J}\sim}, s^*)$  then
    if  $\text{sons}(b^*) = \emptyset$  then
       $\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b') \leftarrow \text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b') \cup \{b^*\}$ 
    else
      for all  $((t^{**}, s^{**}), b^{**}) \in (\text{sons}^+(t^*) \times \text{sons}^+(s^*)) \times \text{sons}(b^*)$  do
        INADMISSIBLE_ROW_LEAF( $b', (t^{**}, s^{**}), b^{**}$ )
      end for
    end if
  end if
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Der Aufruf dieses Algorithmus geschieht aus Algorithmus 4.3.4. Ist b' ein Blatt, b^* nicht und gilt $(b', b^*) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$, so wird (t^*, s^*) weiter künstlich unterteilt und der Algorithmus mit diesen künstlichen Söhnen rekursiv aufgerufen. Dies geschieht so lange, bis auch b^* ein Blatt ist und (b', b^*) dann ggf. zu der Menge \mathcal{L}_{\sim}^- in Form von $\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b') \cup \{b^*\}$ hinzugefügt wird.

Algorithmus 4.3.6 Aktualisierung der Menge \mathcal{L}_{\sim}^- für $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.

```

procedure INADMISSIBLE_COL_LEAF( $b, (t^*, s^*), b^*$ )
   $(t^*, s^*) \leftarrow b^*$ 
  if  $t^* \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}, t^*)$  and  $s^* \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{J}\sim}, s^*)$  then
    if  $\text{sons}(b^*) = \emptyset$  then
       $\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b^*) \leftarrow \text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b^*) \cup \{b\}$ 
    else
      for all  $((t^{**}, s^{**}), b^{**}) \in (\text{sons}^+(t^*) \times \text{sons}^+(s^*)) \times \text{sons}(b^*)$  do
        INADMISSIBLE_COL_LEAF( $b, (t^{**}, s^{**}), b^{**}$ )
      end for
    end if
  end if
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Der Aufruf dieses Algorithmus geschieht aus Algorithmus 4.3.4. Ist b ein Blatt, b^* nicht und gilt $(b^*, b) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$, so wird (t^*, s^*) weiter künstlich unterteilt und der Algorithmus mit diesen künstlichen Söhnen rekursiv aufgerufen. Dies geschieht so lange, bis auch b^* ein Blatt ist und (b^*, b) dann ggf. zu der Menge \mathcal{L}_{\sim}^- in Form von $\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b^*) \cup \{b\}$ hinzugefügt wird.

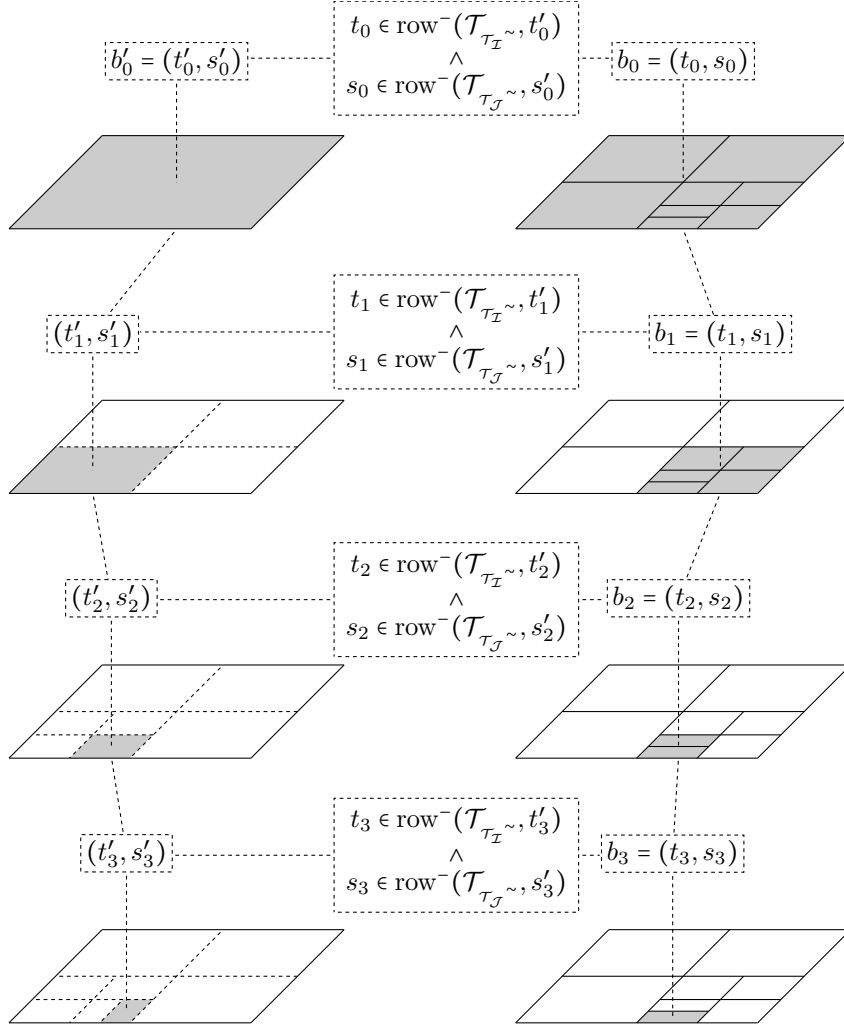


Abbildung 4.5: Vorgehensweise von Algorithmus 4.3.5 für zwei Blöcke $b'_0, b_3 \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $(b'_0, b_3) \in \mathcal{L}^-$, durch künstliche Unterteilung von b'_0 und Auswertung der (Un-)Zulässigkeitsbedingung über unzulässige Blockzeilen.

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

Definition 4.3.11 (Tripelbaum). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $(p, q) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ und $b \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, dann nennen wir einen Clusterbaum $\mathcal{T}_{((p,q),b)}$ mit Wurzel

$$\text{root}(\mathcal{T}_{((p,q),b)}) := ((p, q), b)$$

und den Söhnen

$$\text{sons}((p^*, q^*), b^*) := \begin{cases} \emptyset & , \text{ falls } \text{sons}(b^*) = \emptyset, \\ (\text{sons}^+(p^*) \times \text{sons}^+(q^*)) \times \text{sons}(b^*) & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie den Beschriftungen

$$\hat{p}^* \times \hat{q}^* \times \hat{b}^*$$

für alle $((p^*, q^*), b^*) \in \mathcal{T}_{((p,q),b)}$ einen Tripelbaum für $((p, q), b)$ — oder auch einfach nur Tripelbaum.

Definition 4.3.12 (Konstanter Clusterbaum). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum und $p \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, dann nennen wir einen Clusterbaum $\bar{\mathcal{T}}_p$, der nur aus der Wurzel $\text{root}(\bar{\mathcal{T}}_p) := p$ besteht einen konstanten Clusterbaum für p — oder auch einfach nur einen konstanten Clusterbaum.

Formal definieren wir also für alle $p^* \in \bar{\mathcal{T}}_p$ die Söhne durch $\text{sons}(p^*) := \emptyset$ sowie die Beschriftung über $\hat{p}^* := \hat{p}$.

Bemerkung 4.3.13 (Clusterbaum). In den Definitionen 4.3.11 und 4.3.12 wird implizit angenommen, dass die dort definierten Bäume Clusterbäume darstellen. Die einen Clusterbaum definierenden Eigenschaften (vgl. Definition 3.1.1) lassen sich aus den entsprechenden Eigenschaften der zugrundeliegenden Clusterbäume ableiten. Aus diesem Grund wurde an dieser Stelle auf einen expliziten Beweis verzichtet.

Wir definieren nun einen Baum, mit dem sich die Algorithmen 4.3.5 und 4.3.6 beschreiben lassen.

Definition 4.3.14 (Auswertungsbaum). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim$ zwei Clusterrelationen sowie \sim die zugehörige Blockrelation und $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Einen zulässigen Blockbaum $\mathcal{T}_{(b',b), \sim}$ für $\bar{\mathcal{T}}_{b'}$ und $\mathcal{T}_{((t',s'),b)}$ mit der Zulässigkeitsbedingung

$$\begin{aligned} (b', ((t'^*, s'^*), b^* = (t^*, s^*))) & \text{ zulässig} \\ & :\Leftrightarrow \\ (t^* \notin \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, t'^*) \vee s^* \notin \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}, s'^*)) \end{aligned}$$

für alle $(b', ((t'^*, s'^*), b^* = (t^*, s^*))) \in \mathcal{T}_{(b',b), \sim}$, nennen wir einen Auswertungsbaum für (b', b) bzgl. \sim — oder einfach nur einen Auswertungsbaum.

Im Folgenden schreiben wir für alle $(b', ((t'^*, s'^*), b^*)) \in \mathcal{T}_{(b',b), \sim}$ auch vereinfachend $(b', (t'^*, s'^*), b^*)$ — lassen also zwei Klammern wegfallen —, da die Zugehörigkeit des Elements $((t'^*, s'^*), b^*)$ zum Tripelbaum aus den Bezeichnungen sowie der Reihenfolge der Tupelelemente ersichtlich ist.

Ein initialer Aufruf von Algorithmus 4.3.5 geschieht für zwei in Relation stehende Blöcke $b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $b = (t, s) \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b')$ mit dem Tupel

$$(b', (t', s'), b)$$

aus Algorithmus 4.3.4. Gilt nun

$$\left(t \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, t') \wedge s \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}, s') \right),$$

dann wird entweder die Menge $\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b')$ aktualisiert oder die Funktion INADMISSIBLE_ROW_LEAF mit den Tupeln

$$(b', (t'^*, s'^*), b^*) \in \{b'\} \times (\text{sons}^+(t') \times \text{sons}^+(s')) \times \text{sons}(b)$$

rekursiv aufgerufen. Es entstehen dann keine rekursiven Aufrufe mehr, falls mit $b^* = (t^*, s^*)$

$$\left(t^* \notin \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, t'^*) \vee s^* \notin \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}, s'^*) \right) \quad (4.41)$$

gilt. Ein Tupel

$$(b', (t'^*, s'^*), b^*) \in \mathcal{T}_{(b', b), \sim}$$

mit $b^* = (t^*, s^*)$ ist nach Definition 4.3.14 genau dann zulässig, falls (4.41) gilt. Der Algorithmus 4.3.5 wird somit durch den Auswertungsbaum

$$\mathcal{T}_{(b', b), \sim}$$

beschrieben.

Wir betrachten nun die Funktion INADMISSIBLE_COL_LEAF aus Algorithmus 4.3.6. Ein initialer Aufruf geschieht hier für zwei in Relation stehende Blöcke $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $b' = (t', s') \in \text{col}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b)$ mit dem Tupel

$$(b, (t, s), b')$$

aus Algorithmus 4.3.4. Gilt in diesem Fall nun

$$\left(t \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, t') \wedge s \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}, s') \right),$$

dann wird entweder die Menge $\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b')$ aktualisiert oder die Funktion INADMISSIBLE_COL_LEAF mit den Tupeln

$$(b, (t^*, s^*), b'^*) \in \{b\} \times (\text{sons}^+(t) \times \text{sons}^+(s)) \times \text{sons}(b')$$

rekursiv aufgerufen. Analog zur Betrachtung der Funktion INADMISSIBLE_ROW_LEAF entstehen keine neuen rekursiven Aufrufe der Funktion INADMISSIBLE_COL_LEAF, wenn mit $b'^* = (t'^*, s'^*)$

$$\left(t^* \notin \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, t'^*) \vee s^* \notin \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}, s'^*) \right) \quad (4.42)$$

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

gilt. Unter Verwendung der transponierten Clusterrelationen $\tau_{\mathcal{I}}^{\sim^T}$ und $\tau_{\mathcal{J}}^{\sim^T}$ ist (4.42) nach Korollar 4.3.9 äquivalent zu

$$\left(t'^* \notin \text{row}^-(\tau_{\mathcal{I}}^{\sim^T}, t^*) \vee s'^* \notin \text{row}^-(\tau_{\mathcal{J}}^{\sim^T}, s^*) \right). \quad (4.43)$$

Nach Korollar 4.2.27 ist die transponierte Blockrelation \sim^T die Blockrelation bzgl. $\tau_{\mathcal{I}}^{\sim^T}$ und $\tau_{\mathcal{J}}^{\sim^T}$. Betrachten wir nun ein Tupel

$$(b, (t^*, s^*), b'^*) \in \mathcal{T}_{(b, b'), \sim^T}$$

mit $b'^* = (t'^*, s'^*)$, dann ist dieses nach Definition 4.3.14 genau dann zulässig, falls (4.43) gilt. Da diese Bedingung wiederum äquivalent zu (4.42) ist, beschreibt der Auswertungsbaum

$$\mathcal{T}_{(b, b'), \sim^T}$$

den Algorithmus 4.3.6.

Solange also in Algorithmus 4.3.4 zwei Blöcke $b' \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $b \in \text{row}^=(\tau_{\sim}, b') \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $b' \sim b$ vorliegen, ruft sich die Funktion `INADMISSIBLE_LEAF` mit den Söhnen dieser Blöcke rekursiv auf. Gelangen wir dann im Laufe dieser Prozedur zu einem Punkt, an dem einer der beiden Blöcke ein Blatt des Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, der andere aber noch weiter unterteilt ist, wird entweder der Algorithmus 4.3.5 — falls der Zeilenblock ein Blatt ist — oder der Algorithmus 4.3.6 — falls der Spaltenblock ein Blatt ist — aufgerufen. Wie oben motiviert, werden solche Situationen für $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $b \in \text{row}^=(\tau_{\sim}, b')$ mit $b' \sim b$ durch den Auswertungsbaum $\mathcal{T}_{(b', b), \sim}$ bzw. für $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $b' \in \text{col}^=(\tau_{\sim}, b)$ mit $b' \sim b$ durch den Auswertungsbaum $\mathcal{T}_{(b, b'), \sim^T}$ beschrieben.

Wir untersuchen nun den Algorithmus 4.3.4 hinsichtlich seiner vollständigen Beschreibung aller unzulässigen Blöcke in \mathcal{T}_{\sim} — und damit insbesondere der Menge \mathcal{L}_{\sim}^- . Zulässige Blöcke ignorieren wir, da diese für unsere Betrachtungen unerheblich sind. Wir müssen somit nachweisen, dass der Algorithmus 4.3.4 durch die dort verwendete Auswertung der (Un-)Zulässigkeitsbedingung genau die Menge \mathcal{T}_{\sim}^- beschreibt. Für diese Diskussion unterscheiden wir zwischen der Funktion `INADMISSIBLE_LEAF` aus Algorithmus 4.3.4 auf der einen und den Funktionen `INADMISSIBLE_ROW_LEAF` sowie `INADMISSIBLE_COL_LEAF` aus den Algorithmen 4.3.5 bzw. 4.3.6 auf der anderen Seite. Erstgenannte Funktion zeichnet sich — wie oben bereits erwähnt — durch Levelgleichheit der betrachteten Blöcke aus. Wir sind dort also an der Beschreibung aller

$$(b', b) \in \mathcal{T}_{\sim}^- \quad \text{mit} \quad \text{level}(b') = \text{level}(b) \quad (4.44)$$

interessiert. Für die beiden letztgenannten Funktionen sind die entsprechenden Auswertungsbaume zu untersuchen, welche die Algorithmen 4.3.5 und 4.3.6 beschreiben. Für `INADMISSIBLE_ROW_LEAF` ist zu zeigen, dass alle

$$(b', b) \in \mathcal{T}_{\sim}^- \quad \text{mit} \quad b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \text{ und } \text{level}(b') \leq \text{level}(b) \quad (4.45)$$

und für `INADMISSIBLE_COL_LEAF`, dass alle

$$(b', b) \in \mathcal{T}_{\sim}^- \quad \text{mit} \quad b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \text{ und } \text{level}(b') \geq \text{level}(b) \quad (4.46)$$

durchlaufen werden. Die Tatsache, dass in (4.45) und (4.46) auch Blocktupel auftreten, deren Blöcke sich auf gleichem Level befinden — diese also eigentlich durch (4.44) abgedeckt werden —, liegt in den initialen Aufrufen der Algorithmen 4.3.5 und 4.3.6 begründet. Diese geschehen dort aus Gründen der Übersichtlichkeit mit levelgleichen Blöcken.

Wir untersuchen nun zunächst den Fall (4.44) und widmen uns dann den Blocktupeln, welche in eine der Kategorien (4.45) oder (4.46) fallen. Abschließend fassen wir diese Aussagen in einem Satz zusammen.

Lemma 4.3.15 (Levelgleichheit). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ und $\tau_{\mathcal{J}} \sim$ zwei vererbhbare Clusterrelationen sowie \sim die zugehörige Blockrelation. Seien weiter $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $\text{level}(b') = \text{level}(b)$, dann gilt $(b', b) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$ genau dann, wenn $t \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}, t')$ und $s \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{J}} \sim}, s')$.*

Beweis. „ \Rightarrow “: Es gelte $(b', b) \in \mathcal{T}_{\sim}^- \subseteq \mathcal{T}_{\sim}$, dann folgt mit $\text{level}(b') = \text{level}(b)$ nach Lemma 4.3.2 $t \in \text{row}(\mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}, t')$ und $s \in \text{row}(\mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{J}} \sim}, s')$. Da (b', b) unzulässig ist, folgt $b' \sim b$ und damit $t' \tau_{\mathcal{I}} \sim t$ und $s' \tau_{\mathcal{J}} \sim s$, was wiederum

$$t \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}, t') \quad \text{und} \quad s \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{J}} \sim}, s')$$

bedeutet.

„ \Leftarrow “: Es gelte $t \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}, t')$ und $s \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{J}} \sim}, s')$. Damit folgt $t' \tau_{\mathcal{I}} \sim t$ sowie $s' \tau_{\mathcal{J}} \sim s$, also $b' \sim b$. Mit $\text{level}(b') = \text{level}(b)$ liefert das Charakterisierungslemma 4.2.22 (i) dann $(b', b) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$. \square

Lemma 4.3.16 (Auswertungsbaum). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ und $\tau_{\mathcal{J}} \sim$ zwei vererbhbare Clusterrelationen sowie \sim die zugehörige Blockrelation. Seien weiter $b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $\text{level}(b') \leq \text{level}(b)$, dann gilt $(b', b) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$ genau dann, wenn $b^+ \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b')$ sowie $(b', (t'^*, s'^*), b) \in \mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}^-$ existieren.*

Beweis. „ \Leftarrow “: Seien $b^+ \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b')$ sowie $(b', (t'^*, s'^*), b) \in \mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}^-$, dann existiert ein Pfad

$$((b'_0, (t'_0, s'_0), b_0), \dots, (b'_\ell, (t'_\ell, s'_\ell), b_\ell)),$$

$\ell \in \mathbb{N}_0$, von $\text{root}(\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}) = (b', (t', s'), b^+)$ nach $(b', (t'^*, s'^*), b)$. Durch die Konstruktion der Söhne gilt

$$(b'_i, (t'_i, s'_i), b_i) \in \{b'_{i-1}\} \times (\text{sons}^+(t'_{i-1}) \times \text{sons}^+(s'_{i-1})) \times \text{sons}(b_{i-1})$$

für alle $i \in \{1, \dots, \ell\}$. Damit ist (b_0, \dots, b_ℓ) ein Pfad von b^+ nach b sowie (t'_0, \dots, t'_ℓ) und (s'_0, \dots, s'_ℓ) erweiterte Pfade von t' nach t'^* bzw. s' nach s'^* . Es folgt $t'^* \in \text{sons}^*(t')$ und $s'^* \in \text{sons}^*(s')$ (vgl. Lemma 2.4.13) sowie $b = (t, s) \in \text{sons}^*(b^+)$. Mit $(b', (t'^*, s'^*), b) \in \mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}^-$ folgt nach Definition der Zulässigkeitsbedingung in einem Auswertungsbaum

$$t \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}, t'^*) \quad \text{und} \quad s \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{J}} \sim}, s'^*),$$

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

also $t'^* \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t$ und $s'^* \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim s$. Es sind $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ sowie $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim$ vererbbar und es gilt $t' \in \text{pred}(t'^*)$ sowie $s' \in \text{pred}(s'^*)$, womit nach Korollar 4.2.12 $t' \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t$ und $s' \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim s$ folgt. Nach Definition der Blockrelation \sim bedeutet dies $b' \sim b$. Mit $b \in \text{sons}^*(b^+)$ folgt

$$\text{level}(b') = \text{level}(b^+) \leq \text{level}(b)$$

und das Charakterisierungslemma 4.2.22 (i) oder (iii) — es gilt $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ — liefert $(b', b) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$.

„ \Rightarrow “: Es gelte $(b', b) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$, also insbesondere $b' \sim b$. Da $\text{level}(b') \leq \text{level}(b)$ vorausgesetzt ist, existiert ein $b^+ \in \text{pred}(b)$ mit $\text{level}(b') = \text{level}(b^+)$ und durch die Vererbbarkeit von \sim — diese ergibt sich aus der Vererbbarkeit von $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim$ (vgl. Lemma 4.2.16) — folgt $b' \sim b^+$. Das Charakterisierungslemma 4.2.22 liefert dann

$$(b', b^+) \in \mathcal{T}_{\sim}^-, \quad (4.47)$$

also insbesondere $b^+ \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b')$.

Sei $(b_0 = (t_0, s_0), \dots, b_\ell = (t_\ell, s_\ell))$ mit $\ell \in \mathbb{N}_0$ der eindeutige Pfad von b^+ nach b in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Wir zeigen nun die Existenz eines Elements $(b', (t'^*, s'^*), b) \in \mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}^-$. Hierzu werden wir für alle $i \in \{0, \dots, \ell\}$ die Existenz von Elementen

$$(b', (t'_i, s'_i), b_i) \in \mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}^- \quad \text{mit} \quad t'_i \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t \quad \text{und} \quad s'_i \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim s \quad (4.48)$$

per Induktion nachweisen. Mit $b_\ell = b$ ist dann $(b', (t'_\ell, s'_\ell), b_\ell)$ das gesuchte Tupel. Die Bedingungen $t'_i \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t$ und $s'_i \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim s$ für alle $i \in \{0, \dots, \ell\}$ stellen sicher, dass der so konstruierte Pfad in $\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}$ — durch die Definition $b'_i := b'$ für alle $i \in \{0, \dots, \ell\}$ wird (4.48) zu einem solchen — entlang unzulässiger Clustertupel verläuft.

Für $i = 0$ gilt mit $(t'_0, s'_0) := (t', s')$ und $b_0 = b^+$

$$(b', (t'_0, s'_0), b_0) = (b', (t', s'), b^+) = \text{root}(\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}) \in \mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}.$$

Es gilt $\text{level}(b') = \text{level}(b^+) = \text{level}(b_0)$ und $(b', b_0) = (b', b^+) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$ (vgl. (4.47)), womit nach Lemma 4.3.15

$$t_0 \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, t'_0) \quad \text{und} \quad s_0 \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}, s'_0)$$

folgt. Damit ist $(b', (t'_0, s'_0), b_0)$ unzulässig in $\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}$, was

$$(b', (t'_0, s'_0), b_0) \in \mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}^-$$

bedeutet. Nach Voraussetzung gilt $(b', b) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$, also $b' \sim b$ und damit $t' \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t$ und $s' \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim s$, was $t'_0 \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t$ und $s'_0 \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim s$ liefert. (4.48) gilt also für $i = 0$.

Sei nun $i \in \{0, \dots, \ell - 1\}$ und es existiere

$$(b', (t'_i, s'_i), b_i) \in \mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}^- \quad \text{mit} \quad t'_i \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t \quad \text{und} \quad s'_i \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim s.$$

Da $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim$ vererbbar sind, existiert

$$(t_i'^*, s_i'^*) \in \text{sons}^+(t'_i) \times \text{sons}^+(s'_i) \quad \text{mit} \quad t_i'^* \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t \quad \text{und} \quad s_i'^* \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim s.$$

Wir setzen $(t'_{i+1}, s'_{i+1}) := (t'^*_i, s'^*_i)$, dann gilt insbesondere

$$t'_{i+1} \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t \quad \text{und} \quad s'_{i+1} \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim s.$$

Es bleibt also noch

$$(b', (t'_{i+1}, s'_{i+1}), b_{i+1}) \in \mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}^-$$

zu zeigen. Da $(b', (t'_i, s'_i), b_i)$ unzulässig ist und nach Definition eines Pfads für die Söhne $b_{i+1} \in \text{sons}(b_i) \neq \emptyset$ gilt, folgt nach Konstruktion

$$\begin{aligned} (b', (t'_{i+1}, s'_{i+1}), b_{i+1}) &= (b', (t'^*_i, s'^*_i), b_{i+1}) \\ &\in \{b'\} \times (\text{sons}^+(t'_i) \times \text{sons}^+(s'_i)) \times \text{sons}(b_i) \\ &= \text{sons}((b', (t'_i, s'_i), b_i)) \subseteq \mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass $(b', (t'_{i+1}, s'_{i+1}), b_{i+1})$ unzulässig in $\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}$ ist.

Mit $b_{i+1} = (t_{i+1}, s_{i+1}) \in \text{pred}(b_\ell) = \text{pred}(b)$ folgt

$$t_{i+1} \in \text{pred}(t) \quad \text{und} \quad s_{i+1} \in \text{pred}(s)$$

(vgl. Lemma 3.2.9). Aus $t'_{i+1} \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t$ und $s'_{i+1} \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim s$ sowie der Vererbbarkeit beider Clusterrelationen folgt dann nach Lemma 4.2.12

$$t'_{i+1} \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t_{i+1} \quad \text{und} \quad s'_{i+1} \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim s_{i+1}. \quad (4.49)$$

Die Induktionsvoraussetzung liefert die Unzulässigkeit von $(b', (t'_i, s'_i), b_i)$ in $\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}$, was $t_i \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim, t'_i)$ und $s_i \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim, s'_i)$, also

$$(t'_i, t_i) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}^- \quad \text{und} \quad (s'_i, s_i) \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}^-$$

bedeutet. Falls $\text{sons}((t'_i, t_i)) = \emptyset$ gilt, folgt mit der Unzulässigkeit von (t'_i, t_i) insbesondere $t'_i, t_i \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und damit $(t'_{i+1}, t_{i+1}) = (t'_i, t_i) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}^-$. Gilt $\text{sons}((t'_i, t_i)) \neq \emptyset$, so folgt nach Konstruktion

$$(t'_{i+1}, t_{i+1}) \in \text{sons}^+(t'_i) \times \text{sons}^+(t_i) = \text{sons}((t'_i, t_i)) \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$$

und mit (4.49) auch in diesem Fall $(t'_{i+1}, t_{i+1}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}^-$. Auf analoge Weise lässt sich $(s'_{i+1}, s_{i+1}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}^-$ beweisen. Es gilt also

$$t_{i+1} \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim, t'_{i+1}) \quad \text{und} \quad s_{i+1} \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim, s'_{i+1}).$$

Damit ist $(b', (t'_{i+1}, s'_{i+1}), b_{i+1})$ unzulässig, was

$$(b', (t'_{i+1}, s'_{i+1}), b_{i+1}) \in \mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}^-$$

liefert. Die Aussage ist somit per Induktion bewiesen und es folgt mit $b_\ell = b$ sowie $(t'^*, s'^*) := (t'_\ell, s'_\ell)$ insbesondere die zu beweisende Existenz eines Elements

$$(b', (t'^*, s'^*), b) \in \mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}^-.$$

□

Bemerkung 4.3.17 (Auswertungsbaum). *Es seien die Voraussetzungen von Lemma 4.3.16 gegeben. An dem dortigen Beweis ist zu erkennen, dass für den angegebenen Block $b^+ \in \text{row}^=(\mathcal{T}_\sim, b')$ die Eigenschaft*

$$b^+ \in \text{pred}(b)$$

gilt. Dieser entspricht also gerade dem Vorfahren von b , welcher den gleichen Level wie b' aufweist. Da nur ein einziger Vorfahre von b mit dieser Eigenschaft existiert, ist b^+ insbesondere eindeutig bestimmt.

Unter Verwendung der vorherigen beiden Lemmata fassen wir die Analyse des globalen Algorithmus 4.3.4 zur Konstruktion von \mathcal{L}_\sim^- zusammen. Die Äquivalenz des folgenden Satzes stellt sicher, dass der vorgestellte Algorithmus genau die Elemente aus \mathcal{T}_\sim^- durchläuft und wir somit in der Lage sind, die Menge \mathcal{L}_\sim^- zu bestimmen.

Satz 4.3.18 (Vollständige Beschreibung). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim$ zwei vererbare Clusterrelationen sowie \sim die zugehörige Blockrelation, dann gilt für alle $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ die Aussage $(b', b) \in \mathcal{T}_\sim^-$ genau dann, wenn*

- (i) $b \in \text{row}^=(\mathcal{T}_\sim, b')$ mit $t \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim, t')$ und $s \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim, s')$ gilt oder
- (ii) $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gilt und $b^+ \in \text{row}^=(\mathcal{T}_\sim, b')$ sowie $(b', (t'^*, s'^*), b) \in \mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}^-$ existieren oder
- (iii) $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gilt und $b'^+ \in \text{col}^=(\mathcal{T}_\sim, b)$ sowie $(b, (t^*, s^*), b') \in \mathcal{T}_{(b, b'^+), \sim^T}^-$ existieren.

Beweis. Seien $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.

„ \Rightarrow “: Es gelte $(b', b) \in \mathcal{T}_\sim^-$, dann gilt

$$\text{level}(b') = \text{level}(b), \quad \text{level}(b') < \text{level}(b) \quad \text{oder} \quad \text{level}(b') > \text{level}(b).$$

Falls $\text{level}(b') = \text{level}(b)$ gilt, folgt $b \in \text{row}^=(\mathcal{T}_\sim, b')$ und nach Lemma 4.3.15 $t \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim, t')$ sowie $s \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim, s')$, also die Aussage in (i).

Es gelte nun $\text{level}(b') < \text{level}(b)$, dann folgt mit $(b', b) \in \mathcal{T}_\sim^- \subseteq \mathcal{T}_\sim$ nach Lemma 3.2.6 (b) $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Insbesondere gilt $\text{level}(b') \leq \text{level}(b)$, womit nach Lemma 4.3.16 $b^+ \in \text{row}^=(\mathcal{T}_\sim, b')$ sowie

$$(b', (t'^*, s'^*), b) \in \mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}^-$$

existieren. Es gilt also (ii).

Es gelte $\text{level}(b') > \text{level}(b)$, dann folgt mit $(b', b) \in \mathcal{T}_\sim^- \subseteq \mathcal{T}_\sim$ nach Lemma 3.2.6 (c) $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Des Weiteren gilt mit dem transponierten Relationsbaum und dessen Darstellung über die transponierte Relation — vgl. Lemma 4.2.28 — $(b, b') \in \mathcal{T}_{\sim^T}^-$. Da \sim^T die Blockrelation bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim^T$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim^T$ ist und diese beiden nach Korollar 4.2.26 vererbbar sind, folgt mit $\text{level}(b) \leq \text{level}(b')$ und Lemma 4.3.16 die Existenz von $b'^+ \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim^T}, b)$ sowie

$$(b, (t^*, s^*), b') \in \mathcal{T}_{(b, b'^+), \sim^T}^-.$$

Da \sim die transponierte Blockrelation bzgl. \sim^T ist, gilt mit Korollar 3.4.5 und Lemma 4.2.28 zudem

$$b'^+ \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim^T}, b) \stackrel{3.4.5}{=} \text{col}^=(\mathcal{T}_{\sim^T}^T, b) \stackrel{4.2.28}{=} \text{col}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b),$$

also die Aussage in (iii).

„ \Leftarrow “: Es gelte zuerst (i), also $b \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b')$ mit

$$t \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}, t') \quad \text{und} \quad s \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{J}\sim}, s'),$$

dann folgt mit $\text{level}(b') = \text{level}(b)$ und Lemma 4.3.15 auch $(b', b) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$.

Es gelte nun (ii), also $b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und es existieren $b^+ \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b')$ sowie $(b', (t'^*, s'^*), b) \in \mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}^-$. Da $\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}$ ein Baum ist, existiert ein Pfad

$$((b'_0, (t'_0, s'_0), b_0), \dots, (b'_\ell, (t'_\ell, s'_\ell), b_\ell))$$

mit $\ell \in \mathbb{N}_0$ von $\text{root}(\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}) = (b', (t', s'), b^+)$ nach $(b', (t'^*, s'^*), b)$. Durch die Konstruktion der Söhne gilt

$$(b'_i, (t'_i, s'_i), b_i) \in \{b'_{i-1}\} \times (\text{sons}^+(t'_{i-1}) \times \text{sons}^+(s'_{i-1})) \times \text{sons}(b_{i-1})$$

für alle $i \in \{1, \dots, \ell\}$, womit (b_0, \dots, b_ℓ) ein Pfad von b^+ nach b in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ist. Es folgt also $b \in \text{sons}^*(b^+)$ und damit

$$\text{level}(b') = \text{level}(b^+) \leq \text{level}(b).$$

Nach Lemma 4.3.16 gilt dann $(b', b) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$.

Es gelte (iii), also $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und es existieren $b'^+ \in \text{col}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b)$ sowie $(b, (t^*, s^*), b') \in \mathcal{T}_{(b, b'^+), \sim^T}^-$. Nach Lemma 4.2.28 ist \mathcal{T}_{\sim^T} der transponierte Relationsbaum zu \mathcal{T}_{\sim} , womit nach Korollar 3.4.5

$$b'^+ \in \text{col}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b) \stackrel{3.4.5}{=} \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim}^T, b) \stackrel{4.2.28}{=} \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim^T}, b)$$

folgt. Da $\mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}\sim}$ vererbbar sind, gilt dies auch für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}^T$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}\sim}^T$. Des Weiteren ist \sim^T die Blockrelation bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}^T$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}\sim}^T$, womit dann wie im Fall (ii) über Lemma 4.3.16 $(b, b') \in \mathcal{T}_{\sim^T}^-$ und damit $(b', b) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$ folgt. \square

Aufwand

Eine obere Schranke des Aufwands von Algorithmus 4.3.4 wird durch die Anzahl der (rekursiven) Aufrufe der Funktionen `INADMISSIBLE_LEAF`, `INADMISSIBLE_ROW_LEAF` und `INADMISSIBLE_COL_LEAF` charakterisiert. Für jeden dieser Aufrufe entsteht eine Auswertung der (Un-)Zulässigkeitsbedingung. Zusätzlich wird bei Vorliegen von Blättern $b', b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $b' \sim b$ das Element b der Menge $\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b')$ hinzugefügt. Durch die Verwendung von künstlichen Söhnen bzw. Nachfahren in den Algorithmen 4.3.5 und 4.3.6, kann es vorkommen, dass ein Block mehrfach der Menge $\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b')$ hinzugefügt

werden soll. Da dies in der Implementierung zu vermeiden ist, entsteht ein zusätzlicher Aufwand, um abzufragen, ob bereits $b \in \text{row}^-(\mathcal{T}_\sim, b')$ gilt. Für die Funktion `INADMISSIBLE_LEAF` kann dieser Fall nicht auftreten, da diese Funktion mit jedem Blocktupel nur ein einziges Mal aufgerufen wird. Unter der Voraussetzung, dass die Auswertung der (Un-)Zulässigkeitsbedingung mit einem konstanten Aufwand durchführbar ist, werden wir zeigen, dass sich der Gesamtaufwand für das Aufstellen der Menge \mathcal{L}_\sim^- asymptotisch linear in $\#\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ verhält. In Satz 4.3.18 charakterisiert der Fall (i) die Funktion `INADMISSIBLE_LEAF`, der Fall (ii) die Funktion `INADMISSIBLE_ROW_LEAF` und der Fall (iii) die Funktion `INADMISSIBLE_COL_LEAF`. Wir werden also diese drei Fälle untersuchen, um so den Aufwand der einzelnen Funktionen und damit auch den Aufwand von Algorithmus 4.3.4 abzuschätzen. Hierzu untersuchen wir nun zunächst die Anzahl aller Elemente eines Auswertungsbaums.

Lemma 4.3.19 (Schwachbesetztheit). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, \mathcal{T}_\sim und $\mathcal{T}_\mathcal{J}$ zwei vererbare Clusterrelationen sowie \sim die zugehörige Blockrelation. Des Weiteren sei*

$$C_{\text{sons}} := \max_{t \in \mathcal{T}_\mathcal{I}, s \in \mathcal{T}_\mathcal{J}, b \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \# \text{sons}(t) \# \text{sons}(s) \# \text{sons}(b) \geq 2.$$

(a) Für $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $b \in \text{row}^-(\mathcal{T}_\sim, b')$ gilt

$$\#\mathcal{T}_{(b', b), \sim} \leq 2C_{\text{sons}}^{C_{L_1, \mathcal{T}_\sim} + 1}.$$

(b) Für $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $b' \in \text{col}^-(\mathcal{T}_\sim, b)$ gilt

$$\#\mathcal{T}_{(b, b'), \sim^T} \leq 2C_{\text{sons}}^{C_{L_2, \mathcal{T}_\sim} + 1}.$$

Beweis. (a) Seien $b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $b \in \text{row}^-(\mathcal{T}_\sim, b')$. Für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Mengen

$$\mathcal{T}_{(b', b), \sim}^{(\ell)} := \{(b', (t'^*, s'^*), b^*) \in \mathcal{T}_{(b', b), \sim} \mid \text{level}(b^*) - \text{level}(b) = \ell\}.$$

Wir zeigen nun zuerst

$$\mathcal{T}_{(b', b), \sim} \subseteq \bigcup_{\ell=0}^{C_{L_1, \mathcal{T}_\sim} + 1} \mathcal{T}_{(b', b), \sim}^{(\ell)}$$

und schätzen danach die Mächtigkeiten der $\mathcal{T}_{(b', b), \sim}^{(\ell)}$ für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ ab. Hieraus ergibt sich dann die zu beweisende Aussage.

Sei $(b', (t'^*, s'^*), b^*) \in \mathcal{T}_{(b', b), \sim}$. Gilt $(b', (t'^*, s'^*), b^*) = \text{root}(\mathcal{T}_{(b', b), \sim}) = (b', (t', s'), b)$, so folgt $\text{level}(b^*) - \text{level}(b) = 0$ und damit

$$(b', (t'^*, s'^*), b^*) \in \mathcal{T}_{(b', b), \sim}^{(0)}.$$

Es gelte nun $(b', (t'^*, s'^*), b^*) \neq \text{root}(\mathcal{T}_{(b', b), \sim})$, dann existiert ein Vater $(b', (t'^+, s'^+), b^+) \in \mathcal{T}_{(b', b), \sim}$ von $(b', (t'^*, s'^*), b^*)$. Da dieser Vater in $\mathcal{T}_{(b', b), \sim}$ unzulässig sein muss, folgt mit $b^+ = (t^+, s^+)$ nach Definition der Zulässigkeitsbedingung

$$t^+ \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, t'^+) \quad \text{und} \quad s^+ \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}, s'^+),$$

also insbesondere

$$t'^+ \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim} t^+ \quad \text{und} \quad s'^+ \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim} s^+. \quad (4.50)$$

Da $\mathcal{T}_{(b', b), \sim}$ ein Baum ist, existiert ein Pfad

$$((b'_0, (t'_0, s'_0), b_0), \dots, (b'_n, (t'_n, s'_n), b_n))$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ von $\text{root}(\mathcal{T}_{(b', b), \sim}) = (b', (t', s'), b)$ nach $(b', (t'^+, s'^+), b^+)$. Durch die Definition der Söhne gilt

$$(b'_i, (t'_i, s'_i), b_i) \in \{b'_{i-1}\} \times (\text{sons}^+(t'_{i-1}) \times \text{sons}^+(s'_{i-1})) \times \text{sons}(b_{i-1})$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, womit (b_0, \dots, b_n) ein Pfad von b nach b^+ und (t'_0, \dots, t'_n) sowie (s'_0, \dots, s'_n) erweiterte Pfade von t' nach t'^+ bzw. s' nach s'^+ sind. Es gelten also $t'^+ \in \text{sons}^*(t')$ und $s'^+ \in \text{sons}^*(s')$ (vgl. Lemma 2.4.13) sowie $b^+ \in \text{sons}^*(b)$ und damit insbesondere auch $t' \in \text{pred}(t'^+)$ und $s' \in \text{pred}(s'^+)$. Mit (4.50), der Vererbbarkeit von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}$ sowie Lemma 4.2.12 folgt dann

$$t' \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim} t^+ \quad \text{und} \quad s' \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim} s^+,$$

also $b' \sim b^+$. Mit $b^+ \in \text{sons}^*(b)$ und $b \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b')$ folgt

$$\text{level}(b') = \text{level}(b) \leq \text{level}(b^+).$$

Nach dem Charakterisierungslemma 4.2.22 (i) oder (iii) — es gilt $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ — folgt $(b', b^+) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$ und mit $b^* \in \text{sons}(b^+)$ gilt $\text{sons}(b^+) \neq \emptyset$. Es gilt also $(b', b^+) \in \mathcal{T}_{\sim} \setminus \mathcal{L}_{\sim}$, was wiederum

$$b^+ \in \{\tilde{b} \in \text{sons}^*(b) \mid (b', \tilde{b}) \in \mathcal{T}_{\sim} \setminus \mathcal{L}_{\sim}\} = U_1(\mathcal{T}_{\sim}, (b', b))$$

bedeutet. Mit $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $b \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b')$ folgt

$$\begin{aligned} \text{level}(b^+) - \text{level}(b) &= \text{level}(b^+) - \text{level}(b') \leq \max_{\tilde{b} \in U_1(\mathcal{T}_{\sim}, (b', b))} \text{level}(\tilde{b}) - \text{level}(b') \\ &= L_1(\mathcal{T}_{\sim}, (b', b)) \leq \max_{\substack{\tilde{b}' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \\ \tilde{b} \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim}, \tilde{b}')}} L_1(\mathcal{T}_{\sim}, (\tilde{b}', \tilde{b})) \\ &= C_{L_1, \mathcal{T}_{\sim}}. \end{aligned}$$

Aus $b^* \in \text{sons}(b^+)$ folgt dann

$$\text{level}(b^*) - \text{level}(b) = \text{level}(b^+) + 1 - \text{level}(b) \leq C_{L_1, \mathcal{T}_{\sim}} + 1.$$

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

Insgesamt ergibt sich also

$$(b', (t'^*, s'^*), b^*) \in \bigcup_{\ell=0}^{C_{L_1, \tau_\sim} + 1} \mathcal{T}_{(b', b), \sim}^{(\ell)}$$

und damit

$$\mathcal{T}_{(b', b), \sim} \subseteq \bigcup_{\ell=0}^{C_{L_1, \tau_\sim} + 1} \mathcal{T}_{(b', b), \sim}^{(\ell)}. \quad (4.51)$$

Wir zeigen nun induktiv, dass $\#\mathcal{T}_{(b', b), \sim}^{(\ell)} \leq C_{\text{sons}}^\ell$ für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ gilt. Für $\ell = 0$ folgt $\#\mathcal{T}_{(b', b), \sim}^{(0)} \leq 1 = C_{\text{sons}}^0$. Sei nun $\ell \in \mathbb{N}_0$ so gegeben, dass

$$\#\mathcal{T}_{(b', b), \sim}^{(\ell)} \leq C_{\text{sons}}^\ell$$

gilt. Sei $(b', (t'^*, s'^*), b^*) \in \mathcal{T}_{(b', b), \sim}^{(\ell+1)}$, dann gilt $(b', (t'^*, s'^*), b^*) \in \mathcal{T}_{(b', b), \sim}$ und für den Level folgt $\text{level}(b^*) - \text{level}(b) = \ell + 1 > 0$. Es folgt $b^* \neq b$, also $(b', (t'^*, s'^*), b^*) \neq \text{root}(\mathcal{T}_{(b', b), \sim})$, womit ein Vater $(b', (t'^+, s'^+), b^+) \in \mathcal{T}_{(b', b), \sim}$ von $(b', (t'^*, s'^*), b^*)$ existiert. Nach Konstruktion der Söhne gilt

$$(b', (t'^*, s'^*), b^*) \in \{b'\} \times (\text{sons}^+(t'^+) \times \text{sons}^+(s'^+)) \times \text{sons}(b^+),$$

also insbesondere $b^* \in \text{sons}(b^+)$, womit

$$\text{level}(b^+) - \text{level}(b) = \text{level}(b^*) - 1 - \text{level}(b) = \ell + 1 - 1 = \ell$$

folgt. Es ergibt sich also

$$\mathcal{T}_{(b', b), \sim}^{(\ell+1)} \subseteq \bigcup_{(b', (t'^+, s'^+), b^+) \in \mathcal{T}_{(b', b), \sim}^{(\ell)}} \{b'\} \times (\text{sons}^+(t'^+) \times \text{sons}^+(s'^+)) \times \text{sons}(b^+)$$

und damit nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \#\mathcal{T}_{(b', b), \sim}^{(\ell+1)} &\leq \sum_{(b', (t'^+, s'^+), b^+) \in \mathcal{T}_{(b', b), \sim}^{(\ell)}} \#(\{b'\} \times (\text{sons}^+(t'^+) \times \text{sons}^+(s'^+)) \times \text{sons}(b^+)) \\ &= \sum_{(b', (t'^+, s'^+), b^+) \in \mathcal{T}_{(b', b), \sim}^{(\ell)}} \#\text{sons}^+(t'^+) \#\text{sons}^+(s'^+) \#\text{sons}(b^+) \\ &\leq C_{\text{sons}} \#\mathcal{T}_{(b', b), \sim}^{(\ell)} \leq C_{\text{sons}}^{\ell+1}. \end{aligned}$$

Mit (4.51), $C_{\text{sons}} \geq 2$ und der geometrischen Reihe folgt somit

$$\begin{aligned} \#\mathcal{T}_{(b', b), \sim} &\leq \sum_{\ell=0}^{C_{L_1, \tau_\sim} + 1} \#\mathcal{T}_{(b', b), \sim}^{(\ell)} \leq \sum_{\ell=0}^{C_{L_1, \tau_\sim} + 1} C_{\text{sons}}^\ell \\ &= C_{\text{sons}}^{C_{L_1, \tau_\sim} + 1} \sum_{\ell=0}^{C_{L_1, \tau_\sim} + 1} C_{\text{sons}}^{-\ell} \\ &\leq 2C_{\text{sons}}^{C_{L_1, \tau_\sim} + 1}. \end{aligned}$$

(b) Seien $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $b' \in \text{col}^=(\mathcal{T}_\sim, b)$, dann gilt mit Korollar 3.4.5 und dem transponierten Relationsbaum $b' \in \text{row}^=(\mathcal{T}_\sim^T, b)$. Nach Lemma 4.2.28 ist der transponierte Relationsbaum der Relationsbaum zur transponierten Relation, womit $b' \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim^T}, b)$ folgt. Da \mathcal{T}_\sim und \mathcal{T}_{\sim^T} vererbbar sind, gilt dies auch für $\mathcal{T}_\sim^{\sim^T}$ und $\mathcal{T}_{\sim^T}^{\sim}$. Nach Korollar 4.2.27 ist \sim^T die Blockrelation bzgl. $\mathcal{T}_\sim^{\sim^T}$ und $\mathcal{T}_{\sim^T}^{\sim}$, womit Teil (a) dieses Lemmas

$$\#\mathcal{T}_{(b,b'), \sim^T} \leq 2C_{\text{sons}}^{C_{L_1, \mathcal{T}_\sim^T} + 1}$$

liefert. Nach Korollar 3.4.20 gilt $C_{L_2, \mathcal{T}_\sim} = C_{L_1, \mathcal{T}_\sim^T} = C_{L_1, \mathcal{T}_{\sim^T}}$. Es folgt die zu beweisende Aussage. \square

Bemerkung 4.3.20 (Schwachbesetztheit). *Mit den Voraussetzungen von Lemma 4.3.19 gilt für $b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $b \in \text{row}^=(\mathcal{T}_\sim, b')$ durch die Verwendung des konstanten Clusterbaums $\bar{\mathcal{T}}_{b'}$ als Zeilenclusterbaum die Mengengleichheit*

$$\{b'\} \times \text{row}(\mathcal{T}_{(b',b), \sim}, b') = \mathcal{T}_{(b',b), \sim}.$$

Des Weiteren gilt für alle $((t^, s^*), b^*) \in \mathcal{T}_{((t', s'), b)}$ des Tripelbaums, welcher als Spaltenclusterbaum verwendet wird, die Aussage*

$$\text{col}(\mathcal{T}_{(b',b), \sim}, ((t^*, s^*), b^*)) \subseteq \{b'\}.$$

Damit existiert genau dann eine Schwachbesetztheitskonstante von $\mathcal{T}_{(b',b), \sim}$, wenn sich $\#\mathcal{T}_{(b',b), \sim}$ unabhängig von $\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$ beschränken lässt.

Eine analoge Aussage ergibt sich für den Auswertungsbaum $\mathcal{T}_{(b,b'), \sim^T}$ mit $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $b' \in \text{col}^=(\mathcal{T}_\sim, b)$.

Im Beweis des nachstehenden Satzes werden wir die drei verwendeten Algorithmen separat diskutieren — also den Aufwand der drei auftretenden Funktionen einzeln abschätzen — und damit dann eine obere Schranke für den Gesamtaufwand herleiten.

Satz 4.3.21 (Aufwand von Algorithmus 4.3.4). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, \mathcal{T}_\sim und \mathcal{T}_{\sim^T} zwei vererbbare Clusterrelationen sowie \sim die zugehörige Blockrelation. Es sei weiter \mathcal{T}_\sim $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_\sim}$ -schwachbesetzt und es existiere ein $C_{\text{Adm}} \in \mathbb{N}_0$ so, dass die Auswertung der in Algorithmus 4.3.4 angegebenen (Un-)Zulässigkeitsbedingung mit einem maximalen Aufwand von C_{Adm} erfolgt, dann ist der Gesamtaufwand von Algorithmus 4.3.4 mit*

$$C_{\text{sons}} := \max_{t \in \mathcal{T}_\sim, s \in \mathcal{T}_{\sim^T}, b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \# \text{sons}(t) \# \text{sons}(s) \# \text{sons}(b) \geq 2$$

durch

$$C_{\text{Adm}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_\sim} \left(2C_{\text{sp}, \mathcal{T}_\sim} \left(C_{\text{sons}}^{C_{L_1, \mathcal{T}_\sim} + 1} + C_{\text{sons}}^{C_{L_2, \mathcal{T}_\sim} + 1} \right) + 1 \right) \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$$

beschränkt.

Beweis. Für die Funktion INADMISSIBLE_LEAF aus Algorithmus 4.3.4 entsteht für alle $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und alle $b \in \text{row}^=(\mathcal{T}_\sim, b')$ ein maximaler Aufwand von C_{Adm} zur Auswertung der (Un-)Zulässigkeitsbedingung. Dadurch, dass diese Funktion mit jedem Blocktupel

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

dieser Art nur ein einziges Mal aufgerufen wird, muss nicht überprüft werden, ob ein Block bereits in der unzulässigen Blockzeile ($\text{row}_{\mathcal{L}}^-$) eines zweiten Blocks vorhanden ist. Damit ist der Aufwand für diese Funktion allein durch

$$\sum_{b' \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} C_{\text{Adm}} \# \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b') \leq C_{\text{Adm}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\sim}}^= \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$$

beschränkt.

Wir betrachten nun die Funktion `INADMISSIBLE_ROW_LEAF` aus Algorithmus 4.3.5. Hier entstehen für alle Elemente aus $\mathcal{T}_{(b', b), \sim}$ mit $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $b \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b')$ Auswertungen der (Un-)Zulässigkeitsbedingung und es entsteht potentiell eine Abfrage, ob ein Blatt bereits in der Menge $\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b')$ vorhanden ist. Mit $\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b') \subseteq \text{row}(\mathcal{T}_{\sim}, b')$ ist der Aufwand für diese Abfrage durch $\# \text{row}(\mathcal{T}_{\sim}, b') \leq C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\sim}}$ beschränkt. Unter Verwendung von Lemma 4.3.19 (a) ergibt sich also für den Aufwand von Algorithmus 4.3.5 die obere Schranke

$$\begin{aligned} \sum_{b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \sum_{b \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b')} C_{\text{Adm}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\sim}} \# \mathcal{T}_{(b', b), \sim} &\leq \sum_{b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} 2 C_{\text{Adm}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\sim}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\sim}}^= C_{\text{sons}}^{C_{L_1, \mathcal{T}_{\sim}} + 1} \\ &\leq 2 C_{\text{Adm}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\sim}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\sim}}^= C_{\text{sons}}^{C_{L_1, \mathcal{T}_{\sim}} + 1} \# \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \\ &\leq 2 C_{\text{Adm}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\sim}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\sim}}^= C_{\text{sons}}^{C_{L_1, \mathcal{T}_{\sim}} + 1} \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}. \end{aligned}$$

Für die Funktion `INADMISSIBLE_COL_LEAF` aus Algorithmus 4.3.6 entstehen für alle Elemente aus $\mathcal{T}_{(b, b'), \sim^T}$ mit $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $b' \in \text{col}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b)$ Auswertungen der (Un-)Zulässigkeitsbedingung und es entsteht auch hier potentiell wieder eine Abfrage, ob b bereits in der unzulässigen Blockzeile ($\text{row}_{\mathcal{L}}^-$) eines zweiten Blatts enthalten ist oder nicht. Analog zur obigen Abschätzung für Algorithmus 4.3.5 ergibt sich in diesem Fall mit Lemma 4.3.19 (b) ein maximaler Aufwand von

$$\begin{aligned} \sum_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \sum_{b' \in \text{col}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b)} C_{\text{Adm}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\sim}} \# \mathcal{T}_{(b, b'), \sim^T} &\leq \sum_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} 2 C_{\text{Adm}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\sim}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\sim}}^= C_{\text{sons}}^{C_{L_2, \mathcal{T}_{\sim}} + 1} \\ &\leq 2 C_{\text{Adm}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\sim}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\sim}}^= C_{\text{sons}}^{C_{L_2, \mathcal{T}_{\sim}} + 1} \# \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \\ &\leq 2 C_{\text{Adm}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\sim}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\sim}}^= C_{\text{sons}}^{C_{L_2, \mathcal{T}_{\sim}} + 1} \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}. \end{aligned}$$

Durch Addition dieser drei Abschätzungen lässt sich der maximale Gesamtaufwand von Algorithmus 4.3.4 somit durch

$$C_{\text{Adm}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\sim}}^= \left(2 C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\sim}} \left(C_{\text{sons}}^{C_{L_1, \mathcal{T}_{\sim}} + 1} + C_{\text{sons}}^{C_{L_2, \mathcal{T}_{\sim}} + 1} \right) + 1 \right) \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$$

beschränken. □

Bemerkung 4.3.22 (Beschränktheit von C_{Adm}). *Es seien die Voraussetzungen von Satz 4.3.21 gegeben. Sind die Clusterrelationsbäume $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}$ $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}}$ - bzw. $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}}$ -schwachbesetzt, so gilt mit*

$$\text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, t') \subseteq \text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, t') \quad \text{und} \quad \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}, s') \subseteq \text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}, s')$$

für alle $t' \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $s' \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$, dass sich C_{Adm} durch $(C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim} + C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim})$ beschränken lässt.

Bemerkung 4.3.23 (Matrix-Galerkin-Blockrelationsbaum). *Es seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$, $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ und $\asymp_{(A,B)}$ die Matrix-Galerkin-Blockrelation bzgl. A und B in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Da die zugrundeliegenden Matrix-Galerkin-Clusterrelationen \asymp_A und \asymp_B nach Korollar 4.2.17 vererbbar sind, lassen sich die Aussagen der Sätze 4.3.18 und 4.3.21 auf den Matrix-Galerkin-Blockrelationsbaum $\mathcal{T}_{\asymp_{(A,B)}}$ anwenden. Die Menge $\mathcal{L}_{\asymp_{(A,B)}}^-$ lässt sich somit — unter den entsprechenden Voraussetzungen der Sätze — mit einem in $\#\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ asymptotisch linearen Aufwand durch Algorithmus 4.3.4 bestimmen, vorausgesetzt alle anderen dort auftretenden Größen sind unabhängig von $\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$ beschränkt.*

Abschließend diskutieren wir nun das Aufstellen der Mengen $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}^-$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}^-$, die wir für die Auswertung der Unzulässigkeitsbedingung benötigen.

Aufstellen von Clusterrelationsbäumen

Die Auswertung, ob ein Tupel $(b', b) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ unzulässig ist, geschieht in den Algorithmen 4.3.4, 4.3.5 und 4.3.6 über die Relationsbäume $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}$ bzw. die Mengen $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}^-$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}^-$ — in Form der unzulässigen Blockzeilen. Es wird also ein Algorithmus benötigt, der diese Mengen aufstellt. Potentiell würde sich hierfür Algorithmus 3.2.1 zur Konstruktion eines minimal zulässigen Blockbaums eignen, wenn die Zulässigkeitsbedingung (4.22) eines Relationsbaums mit einem Aufwand in $\mathcal{O}(1)$ ausgewertet werden könnte. Im Kontext dieser Arbeit und der späteren Anwendung stehen Matrix-Galerkin-Clusterrelationen im Fokus der Betrachtung. Für eine Matrix-Galerkin-Clusterrelation \asymp_A bzgl. $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ ist ein Tupel $(p, q) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ genau dann unzulässig, wenn $(i, j) \in \hat{p} \times \hat{q}$ mit $a_{ij} \neq 0$ existieren. Die Tatsache, dass durch eine naive Auswertung der Zulässigkeitsbedingung ein zu hoher Aufwand entstehen könnte, verdeutlicht das folgende Beispiel.

Beispiel 4.3.24 (Auswertung der Zulässigkeitsbedingung). *Wir betrachten für $n := 2^L$, $L \in \mathbb{N}$, und $\mathcal{I} := \{1, \dots, n\}$ die Matrix $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ mit den Einträgen*

$$a_{ij} := \begin{cases} 2 & , \text{ falls } i = j, \\ -1 & , \text{ falls } |i - j| = 1, \\ 0 & \text{ sonst} \end{cases}$$

für alle $i, j \in \mathcal{I}$. Des Weiteren sei \asymp_A die Matrix-Galerkin-Clusterrelation bzgl. A in einem Clusterbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, und wir sind an der Konstruktion der Menge $\mathcal{T}_{\asymp_A}^-$ interessiert.

Die Struktur des Clusterbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ — welcher bei einem Relationsbaum als Zeilen- und Spaltenclusterbaum dient — sei durch Abbildung 4.6 gegeben. $\ell \in \mathbb{N}_0$ bezeichne dort den Level der entsprechenden Stufe des Clusterbaums. Für alle $p \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ sei die zugehörige Beschriftung $\hat{p} \subseteq \mathcal{I}$ zusammenhängend und nicht permutiert. Es existieren also für alle

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

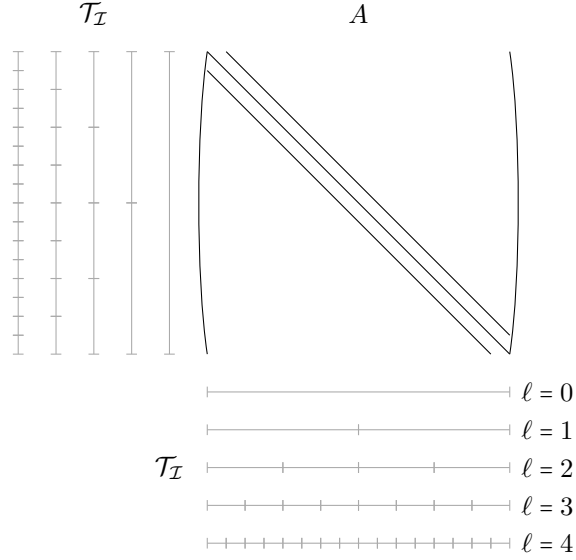


Abbildung 4.6: Tridiagonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ aus Beispiel 4.3.24 mit Clusterbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$.

$p \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ Elemente $a_p, b_p \in \mathcal{I}$ mit $a_p \leq b_p$ und $\hat{p} = \{a_p, a_p + 1, \dots, b_p\}$. Die Beschriftungen für Söhne entstehen durch die Halbierung der Beschriftung des entsprechenden Vaters. Zusätzlich nehmen wir an, dass der Zugriff auf alle Nicht-Null-Einträge einer Matrixzeile mit einem Aufwand in $\mathcal{O}(1)$ realisierbar ist.

Betrachten wir zuerst den initialen Aufruf von Algorithmus 3.2.1 mit

$$(p^0, p^0) = (\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}), \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}))$$

aus Bild ① der Abbildung 4.7 und stellen mit einem Aufwand in $\mathcal{O}(1)$ fest, dass $a_{ij} \neq 0$ mit $i := 1$ und $j := 1$ gilt. Da \hat{p}^0 nicht permutiert ist, erfordert es einen einzigen Vergleich, um $j \in \hat{p}^0$ und damit $p^0 \asymp_A p^0$ festzustellen. Dieser Schritt ist also unproblematisch.

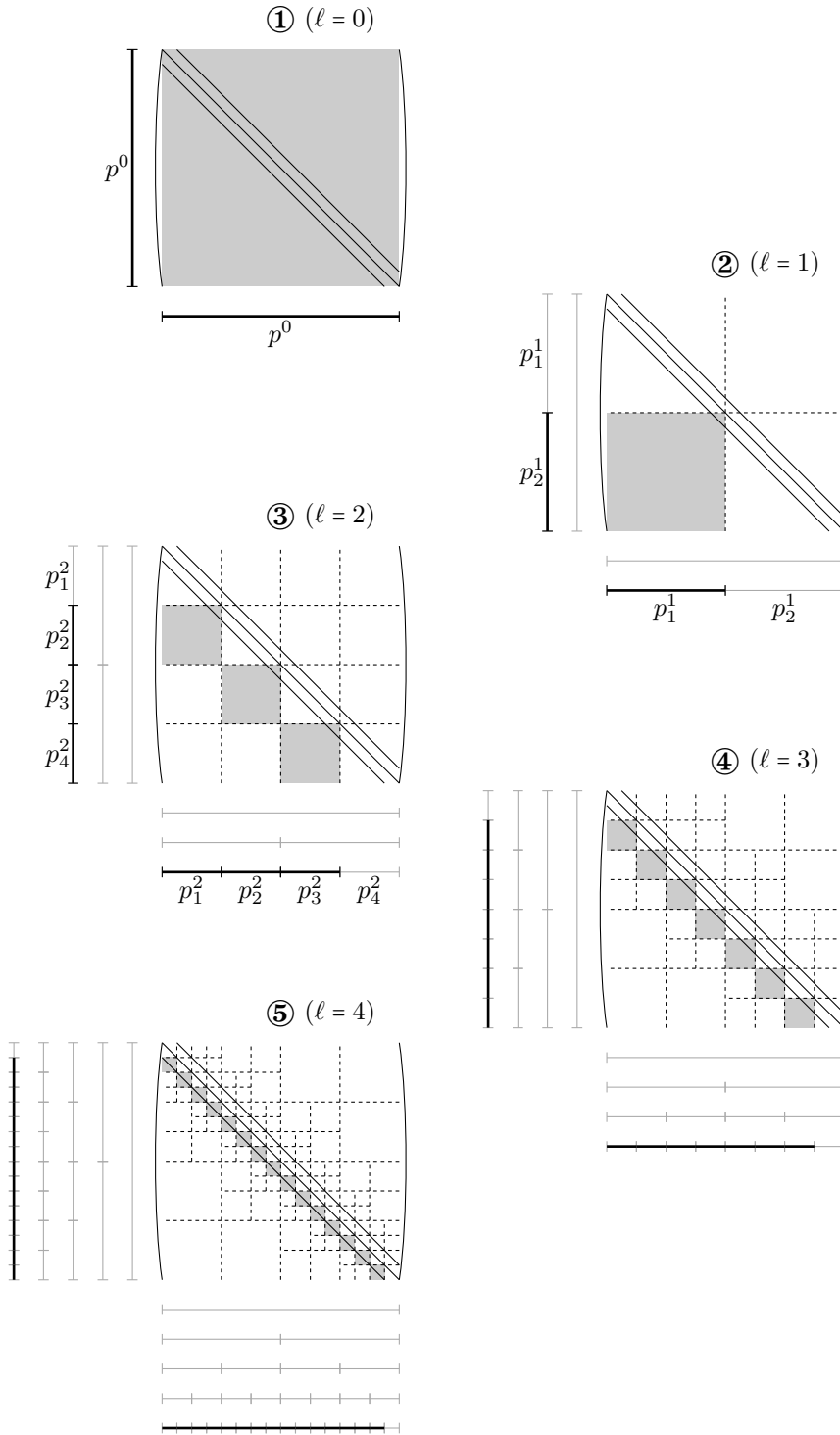
Interessanter wird es auf dem nächsten Level ($\ell = 1$), welcher in Bild ② der Abbildung 4.7 verdeutlicht wird. Hier konzentrieren wir uns auf den markierten Block $(p_2^1, p_1^1) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$. Mit einem Aufwand in $\mathcal{O}(1)$ lässt sich auch hier feststellen, dass $a_{ij} \neq 0$ für $i := n/2 + 1 \in \hat{p}_2^1$ und $j := n/2$ gilt. Als zweiter Schritt wäre nun $j \in \hat{p}_1^1$ zu suchen, um festzustellen, ob $p_2^1 \asymp_A p_1^1$ gilt. Ein naiver Ansatz würde die Beschriftung \hat{p}_1^1 durchlaufen und aufgrund der Sortierung mit einem Aufwand von $\#\hat{p}_1^1 = n/2$ feststellen, dass $j \in \hat{p}_1^1$ und somit $(p_2^1, p_1^1) \in \mathcal{T}_{\asymp_A}$ gilt.

Für die in Bild ③ der Abbildung 4.7 dargestellte dritte Ebene ($\ell = 2$) des Clusterbaums ergibt sich mit analogen Argumenten für alle markierten Blöcke

$$(p_2^2, p_1^2), (p_3^2, p_2^2), (p_4^2, p_3^2) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$$

jeweils ein Aufwand in der Größenordnung $\#\hat{p}_k^2 = n/4$ für alle $k \in \{1, \dots, 3\}$.

Auf der nächsten Stufe (siehe Bild ④ der Abbildung 4.7) existieren sieben dieser Blöcke und für jeden dieser entsteht ein Aufwand von $n/8$.


 Abbildung 4.7: Betrachtete Blöcke auf den Stufen $\ell = 0, \dots, 4$ des Beispiels 4.3.24.

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

Mit wachsender Tiefe $\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})$ des Clusterbaums bei wachsender Dimension der Matrix wiederholt sich diese Situation immer wieder (vgl. Bild ⑤ der Abbildung 4.7 für $\ell = 4$). Auf jeder Stufe $\ell \in \mathbb{N}_0$ existieren 2^ℓ Cluster mit jeweils einer Mächtigkeit $n/2^\ell$ von deren Beschriftung. Diese bilden dann $(2^\ell - 1)$ wie oben dargestellte Tupel. Es ergibt sich für diese zusammen ein Aufwand von

$$(2^\ell - 1) \frac{n}{2^\ell}$$

für die Auswertung der Zulässigkeitsbedingung. Für die Gesamtheit dieser Blöcke aller Stufen zusammen entsteht also ein Aufwand — im Folgenden mit Eff bezeichnet — von

$$\begin{aligned} \text{Eff} &= \sum_{\ell=1}^{\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})} (2^\ell - 1) \frac{n}{2^\ell} = \sum_{\ell=0}^{\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})} (2^\ell - 1) \frac{n}{2^\ell} \\ &= n \left(\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}) + 1 - \sum_{\ell=0}^{\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})} 2^{-\ell} \right) \\ &= n \left(\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}) + 1 - 2 \left(1 - 2^{-(\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})+1)} \right) \right) \\ &= n \left(\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}) - 1 + 2^{-\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})} \right). \end{aligned}$$

Mit $\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}) \geq 0$ folgt

$$0 \leq 2^{-\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})} \leq 1$$

und damit

$$n(\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}) - 1) \leq \text{Eff} \leq n \text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}).$$

Beispiel 4.3.24 zeigt, dass der Aufwand für die Auswertung von (4.22) und damit für das Aufstellen von $\mathcal{T}_{\prec_A}^-$ von der Tiefe des Clusterbaums abhängen kann. Da sich diese in typischen Anwendungen wie $\log_2(\#\mathcal{I})$ verhält und sich die Anzahl der Blöcke in $\mathcal{T}_{\prec_A}^-$ allein in $\mathcal{O}(\#\mathcal{I})$ befindet, wird der Relationsbaum mit obiger Strategie zur Auswertung von (4.22) nicht mit einem Aufwand in $\mathcal{O}(\#\mathcal{I})$ konstruierbar sein. Es wird nun eine Variante vorgestellt, die dies doch möglich macht. Die Grundidee ist, den Relationsbaum von unten nach oben aufzubauen. Hierzu wird vorab allgemein erläutert, wie sich ein Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ anhand der Menge $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ seiner Blätter rekonstruieren lässt. Gilt für einen Block $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, so müssen alle Vorfahren dieses Blocks nach Konstruktion auch in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ liegen. Die Tatsache, dass alle Blöcke des Blockbaums auch über die Menge der Blätter aufgestellt werden können, zeigt Lemma 4.3.25.

Lemma 4.3.25. *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum. Gilt $b^+ \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, dann existiert ein $b^* \in \text{sons}^*(b^+)$ mit $b^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.*

Beweis. Wir beweisen diese Aussage per Induktion über $\#\text{sons}^*(b^+) \in \mathbb{N}$ für alle $b^+ \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.

Für $b^+ \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $\#\text{sons}^*(b^+) = 1$ gilt $b^+ \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und mit $b^+ \in \text{sons}^*(b^+)$ folgt die Aussage.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ so gegeben, dass für alle $b^+ \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $\#\text{sons}^*(b^+) \leq n$ ein $b^* \in \text{sons}^*(b^+)$ mit $b^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ existiert.

Für $b^+ \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $\#\text{sons}^*(b^+) = n + 1 \geq 2$ folgt $\text{sons}(b^+) \neq \emptyset$. Sei $b \in \text{sons}(b^+)$, dann gilt $b^+ \notin \text{sons}^*(b)$. Mit $b^+ \in \text{sons}^*(b^+)$ und $\#\text{sons}^*(b^+) = n + 1$ folgt

$$\#\text{sons}^*(b) \leq \#\text{sons}^*(b^+) - 1 = n + 1 - 1 = n.$$

Nach Induktionsvoraussetzung existiert also ein $b^* \in \text{sons}^*(b)$ mit $b^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Da $b \in \text{sons}(b^+)$ gilt, folgt $b^* \in \text{sons}^*(b^+)$ und damit die Aussage. \square

Algorithmus 4.3.7 nutzt die Darstellung des Vaters eines Blocks — wie sie in Lemma 3.2.8 gegeben ist — aus, um $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ aufzustellen.

Algorithmus 4.3.7 Aufstellen eines Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ über die Menge $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.

```

procedure BLOCKCLUSTER_BACKWARD( $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ )
  for all  $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$  do
     $(t^+, s^+) \leftarrow b$ 
    while  $t^+ \neq \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})$  and  $s^+ \neq \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}})$  do
       $(t, s) \leftarrow (t^+, s^+)$ 
      if  $\text{level}(t^+) > \text{level}(s^+)$  then
         $t^+ \leftarrow \text{father}(t^+)$ 
      else if  $\text{level}(t^+) < \text{level}(s^+)$  then
         $s^+ \leftarrow \text{father}(s^+)$ 
      else
         $t^+ \leftarrow \text{father}(t^+)$ 
         $s^+ \leftarrow \text{father}(s^+)$ 
      end if
      if  $(t^+, s^+) \notin \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$  then
         $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \leftarrow \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \cup \{(t^+, s^+)\}$ 
         $\text{sons}((t^+, s^+)) \leftarrow \text{sons}((t^+, s^+)) \cup \{(t, s)\}$ 
      else
        break
      end if
    end while
  end for
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Für ein Blatt $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ werden nach der Vorschrift (3.6) — aus Lemma 3.2.8 — sukzessive dessen Vorfahren zu $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ hinzugefügt. Bei Erreichen eines Blocks (t^+, s^+) , welcher sich bereits im Blockbaum befindet, geht der Algorithmus zum nächsten Blatt über, da alle Vorfahren von (t^+, s^+) dann schon zu $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ hinzugefügt wurden. Ansonsten würde (t^+, s^+) nicht in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ existieren.

Bemerkung 4.3.26 (Aufwand von Algorithmus 4.3.7). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum und $C_{\text{sons}} := \max_{b \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \# \text{sons}(b)$. Als Aufwand betrachten wir die Abfrage, ob ein Block bereits in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ vorhanden ist oder zu dem Baum hinzugefügt werden muss. Dieser Aufwand sei durch $C_{\text{if}} \in \mathbb{N}_0$ beschränkt. Für jeden Sohn eines Nicht-Blatt-Blocks tritt so eine Abfrage maximal einmal auf, womit der Aufwand von Algorithmus 4.3.7 durch

$$\sum_{b \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} C_{\text{if}} \# \text{sons}(b) \leq \sum_{b \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} C_{\text{if}} C_{\text{sons}} = C_{\text{if}} C_{\text{sons}} \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$$

beschränkt ist. Ist $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ zusätzlich C_{sp} -schwachbesetzt, dann folgt nach Lemma 3.2.23 (a) die obere Schranke

$$C_{\text{if}} C_{\text{sons}} \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \leq C_{\text{if}} C_{\text{sons}} C_{\text{sp}} \min\{\# \mathcal{T}_{\mathcal{I}}, \# \mathcal{T}_{\mathcal{J}}\}.$$

Algorithmus 4.3.7 gibt an, wie ein vollständiger Blockbaum aus der Menge seiner Blätter rekonstruiert werden kann. Wir sind allerdings nur an der Menge $\mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$ aller unzulässigen Blöcke eines Relationsbaums mit einer zugrundeliegenden vererbbaaren Clusterrelation $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ interessiert. Folgendes Lemma zeigt, dass hierzu die Kenntnis aller unzulässigen Blätter — also die Kenntnis der Menge $\mathcal{L}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$ — ausreicht.

Lemma 4.3.27 (Unzulässige Blöcke). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum und $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ eine in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ vererbbaare Relation. Es gilt $(p^+, q^+) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$ genau dann, wenn $(p^+, q^+) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}$ gilt und ein $(p, q) \in \text{sons}^*((p^+, q^+))$ mit $(p, q) \in \mathcal{L}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$ existiert.

Beweis. „ \Rightarrow “: Da $\mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^- \subseteq \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}$ gilt, bleibt zu zeigen, dass für alle $(p^+, q^+) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$ ein $(p, q) \in \text{sons}^*((p^+, q^+))$ mit $(p, q) \in \mathcal{L}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$ existiert. Wir beweisen diese Aussage per Induktion über $\# \text{sons}^*((p^+, q^+)) \in \mathbb{N}$ für alle $(p^+, q^+) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$.

Für $(p^+, q^+) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$ mit $\# \text{sons}^*((p^+, q^+)) = 1$ gilt $(p^+, q^+) \in \mathcal{L}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}$ und $(p^+, q^+) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$ liefert $p^+ \tau_{\mathcal{I}} \sim q^+$, also $(p^+, q^+) \in \mathcal{L}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ so gegeben, dass für alle $(p^+, q^+) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$ mit $\# \text{sons}^*((p^+, q^+)) \leq n$ ein $(p, q) \in \text{sons}^*((p^+, q^+))$ mit $(p, q) \in \mathcal{L}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$ existiert.

Für $(p^+, q^+) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$ mit $\# \text{sons}^*((p^+, q^+)) = n + 1 \geq 2$ gilt $\text{sons}((p^+, q^+)) \neq \emptyset$. Es folgt $p^+ \tau_{\mathcal{I}} \sim q^+$ und deswegen nach Lemma 4.2.11 die Existenz von $p \in \text{sons}^+(p^+)$ und $q \in \text{sons}^+(q^+)$ mit $p \tau_{\mathcal{I}} \sim q$. Da $\emptyset \neq \text{sons}((p^+, q^+)) = \text{sons}^+(p^+) \times \text{sons}^+(q^+)$ gilt, folgt $(p, q) \in \text{sons}((p^+, q^+)) \subseteq \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}$ und $p \tau_{\mathcal{I}} \sim q$ liefert $(p, q) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$. Es folgt mit $(p^+, q^+) \in \text{sons}^*((p^+, q^+))$, $(p^+, q^+) \notin \text{sons}^*((p, q))$ und $\# \text{sons}^*((p^+, q^+)) = n + 1$

$$\# \text{sons}^*((p, q)) \leq \# \text{sons}^*((p^+, q^+)) - 1 = n + 1 - 1 = n.$$

Die Induktionsvoraussetzung liefert nun die Existenz eines $(p^*, q^*) \in \text{sons}^*((p, q))$ mit $(p^*, q^*) \in \mathcal{L}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$. Da $(p, q) \in \text{sons}((p^+, q^+))$ und $(p^*, q^*) \in \text{sons}^*((p, q))$ gilt, folgt $(p^*, q^*) \in \text{sons}^*((p^+, q^+))$ und damit die Aussage.

„ \Leftarrow “: Sei $(p^+, q^+) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}$ und $(p, q) \in \text{sons}^*((p^+, q^+))$ mit $(p, q) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \sim}^-$, dann gilt $p \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim} q$ und $p^+ \in \text{pred}(p)$ sowie $q^+ \in \text{pred}(q)$. Nach Korollar 4.2.13 folgt $p^+ \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim} q^+$. Damit ist $(p^+, q^+) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}$ unzulässig, was $(p^+, q^+) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}^-$ liefert. \square

Adaptieren wir nun Algorithmus 4.3.7 an die Bestimmung von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}^-$, so ergibt sich Algorithmus 4.3.8. Da diese Menge für die bereits vorgestellten Algorithmen 4.3.4, 4.3.5 und 4.3.6 in Form der unzulässigen Blockzeilen benötigt werden, fügen wir einen Block (p^+, q^+) der Menge $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}^-$ über

$$\text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, p^+) \cup \{q^+\}$$

hinzu. Die Informationen über die Söhne eines Blocks sind für unsere Zwecke nicht von Interesse und werden deshalb vernachlässigt.

Bemerkung 4.3.28 (Aufwand von Algorithmus 4.3.8). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}$ eine in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ vererbare Clusterrelation sowie der zugehörige Relationsbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim} \subseteq C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}}$ schwachbesetzt. In Analogie zu Bemerkung 4.3.26 betrachten wir hier als Aufwand die Abfrage, ob ein Cluster bereits in einer unzulässigen Blockzeile eines zweiten Clusters vorhanden ist oder nicht. Mit*

$$\text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, p) \subseteq \text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, p)$$

für alle $p \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, ist der Aufwand dieser Abfrage durch $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}}$ beschränkt.

Es sei $C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} := \max_{p \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} \# \text{sons}(p)$, dann gilt

$$\max_{(p, q) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}} \# \text{sons}((p, q)) \leq C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}^2$$

und nach Bemerkung 4.3.26 — mit $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}^- \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}$ und $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \sim}^- \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{I} \sim}$ — lässt sich der Gesamtaufwand von Algorithmus 4.3.8 durch

$$C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}} C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}^2 C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}} \# \mathcal{T}_{\mathcal{I}} = C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}^2 C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}}^2 \# \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$$

nach oben abschätzen.

Uns steht somit ein Algorithmus zur Verfügung, mit dem wir die Menge aller unzulässigen Blöcke eines Relationsbaums — bei Vorliegen einer vererbaren Clusterrelation — nur unter Zuhilfenahme aller unzulässigen Blätter konstruieren können. Wir betrachten nun abschließend noch eine Konstruktionsmöglichkeit der Menge $\mathcal{L}_{\sim_A}^-$ für eine Matrix-Galerkin-Clusterrelation \asymp_A bzgl. einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$.

Nach Korollar 3.1.6 bilden die Blätter eines Clusterbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ eine disjunkte Partition der Indexmenge \mathcal{I} . Für jedes $i \in \mathcal{I}$ existiert also ein eindeutiger Cluster $p \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ mit $i \in \hat{p}$. Durch eine Rekursion über $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ lässt sich jedem Index dieses eindeutige Blatt zuordnen. Des Weiteren gilt $(p, q) \in \mathcal{L}_{\sim_A}^-$ genau dann, wenn $p, q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ mit $p \asymp_A q$, also $(i, j) \in \hat{p} \times \hat{q}$ mit $a_{ij} \neq 0$ existieren. Aus diesem Grund stellt Algorithmus 4.3.9 die Menge $\mathcal{L}_{\sim_A}^-$ auf.

Algorithmus 4.3.8 Aufstellen der Menge $\mathcal{T}_{\mathcal{T}\sim}^-$ über $\mathcal{L}_{\mathcal{T}\sim}^-$.

```

procedure BUILD_INADMISSIBLE_BLOCKS( $\mathcal{L}_{\mathcal{T}\sim}^-$ )
  for all  $(p, q) \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}\sim}^-$  do
     $(p^+, q^+) \leftarrow (p, q)$ 
    while  $p^+ \neq \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{T}})$  and  $q^+ \neq \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{T}})$  do
      if  $\text{level}(p^+) > \text{level}(q^+)$  then
         $p^+ \leftarrow \text{father}(p^+)$ 
      else if  $\text{level}(p^+) < \text{level}(q^+)$  then
         $q^+ \leftarrow \text{father}(q^+)$ 
      else
         $p^+ \leftarrow \text{father}(p^+)$ 
         $q^+ \leftarrow \text{father}(q^+)$ 
      end if
      if  $q^+ \notin \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{T}\sim}, p^+)$  then
         $\text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{T}\sim}, p^+) \leftarrow \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{T}\sim}, p^+) \cup \{q^+\}$ 
      else
        break
      end if
    end while
  end for
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Analog zu der Beschreibung von Algorithmus 4.3.7 wird für ein $(p, q) \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}\sim}^-$ nach Vorschrift (3.6) — aus Lemma 3.2.8 über die rekursive Darstellung des Vaters — zu dessen Vorfahren übergegangen, um diese $\mathcal{T}_{\mathcal{T}\sim}^-$ in Form der unzulässigen Blockzeilen hinzuzufügen. Gilt für ein $(p^+, q^+) \in \mathcal{T}_{\mathcal{T}\sim}^-$ bereits $q^+ \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{T}\sim}, p^+)$, so wurden alle Vorfahren dieses Blocks bereits durch den Algorithmus behandelt und es wird zum nächsten Element aus $\mathcal{L}_{\mathcal{T}\sim}^-$ übergegangen.

Algorithmus 4.3.9 Aufstellen der Menge $\mathcal{L}_{\succ_A}^-$ für $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$.

```

procedure BUILD_INADMISSIBLE_LEAF( $A, \mathcal{I}, \text{idx2leaf}_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ )
  for all  $i \in \mathcal{I}$  do
     $p \leftarrow \text{idx2leaf}_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}[i]$ 
    for all  $j \in \text{row}(A, i)$  do
       $q \leftarrow \text{idx2leaf}_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}[j]$ 
       $\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\succ_A}, p) \leftarrow \text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\succ_A}, p) \cup \{q\}$ 
    end for
  end for
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Zu Beginn des Algorithmus gilt $\mathcal{L}_{\succ_A}^- = \emptyset$. Das Array $\text{idx2leaf}_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ ordnet jedem Index $i \in \mathcal{I}$ über $\text{idx2leaf}_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}[i] \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ das eindeutige Element $p \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ mit $i \in \hat{p}$ zu. Die Elemente $(p, q) \in \mathcal{L}_{\succ_A}^-$ werden $\mathcal{L}_{\succ_A}^-$ in Form von $\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\succ_A}, p) \cup \{q\}$ hinzugefügt.

Bemerkung 4.3.29 (Aufwand von Algorithmus 4.3.9). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ eine $C_{\text{sp}, A}$ -schwachbesetzte Matrix und der zugehörige Relationsbaum $\mathcal{T}_{\succ_A} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\succ_A}}$ -schwachbesetzt. Auch hier betrachten wir als Aufwand die Abfrage, ob für zwei Blätter $p, q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ bereits $q \in \text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\succ_A}, p)$ gilt. Aufgrund von

$$\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\succ_A}, p) \subseteq \text{row}(\mathcal{T}_{\succ_A}, p)$$

für alle $p \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, ist diese Abfrage durch $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\succ_A}}$ beschränkt, womit sich der Aufwand von Algorithmus 4.3.9 durch

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{j \in \text{row}(A, i)} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\succ_A}} \leq C_{\text{sp}, A} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\succ_A}} \# \mathcal{I}$$

abschätzen lässt.

Bemerkung 4.3.30 (Matrix-Galerkin-Clusterrelation). Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass für eine Matrix-Galerkin-Clusterrelation \succ_A bzgl. $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ der Algorithmus 4.3.9 nicht vor 4.3.8 ausgeführt werden muss, sondern in diesen integriert werden kann. Identifizieren wir ein Tupel $(p, q) \in \mathcal{L}_{\succ_A}^-$ wie in Algorithmus 4.3.9, dann lassen sich anschließend sofort die unzulässigen Blockzeilen für dessen Vorfahren aktualisieren. Danach bestimmen wir das nächste Element aus $\mathcal{L}_{\succ_A}^-$ und verfahren dort analog.

Bemerkung 4.3.31 (Nicht-rekursive Implementierung). Das in einem Großteil der Implementierungen von \mathcal{H}^2 -Matrizen verwendete Format für Cluster- und Blockbäume ist aufgrund der Konstruktion über die Söhne ein hierarchisches von der Wurzel hin zu den Blättern. Das heißt, es existieren für einen Clusterbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und alle $p \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit

$\text{sons}(p) \neq \emptyset$ immer Verlinkungen zu den Söhnen, aber nicht zurück zum Vater. So sind auch die meisten Algorithmen auf diese Struktur abgestimmt und laufen daher rekursiv ab. Es werden dann immer entweder vor dem rekursiven Aufruf für die Söhne Berechnungen durchgeführt und/oder nach dem rekursiven Aufruf Teilergebnisse aus den rekursiv bereits behandelten Söhnen verwendet. Für den überwiegenden Teil der gängigen Algorithmen ist diese Vorgehensweise sehr gut anwendbar, da alle Informationen, die verarbeitet werden sollen, eine lokale Eigenschaft besitzen. Das heißt, dass ein Cluster nur Informationen der eigenen Söhne benötigt oder zwei Cluster interagieren, die denselben Vater besitzen. Es sollte also eigentlich immer das Bestreben sein, alle Algorithmen für Clusterbäume ebenfalls in diese rekursive Form zu bringen.

Wie man schnell erkennt, ist der Algorithmus 4.3.8 nicht als Rekursion formuliert, also nicht in der eigentlich üblichen Form. Aus diesem Grund bedarf es einer Begründung dieser Tatsache.

Ohne zusätzliche Hilfsstrukturen liegt allen rekursiven Behandlungen von Clusterbäumen die Eigenschaft zugrunde, dass die aktuelle Rekursion nur den Teilbaum bzgl. des Clusters „sieht“, mit dem der Algorithmus/die Funktion gerade aufgerufen wurde.

Die Elemente der Menge $\mathcal{L}_{\mathcal{T}_{\sim}}^-$ (für eine vererbbsame Clusterrelation \mathcal{T}_{\sim}) bilden nicht zwangsläufig nur lokale Informationen ab — lokal im obigen Sinne eines Clusterbaums. Das heißt es können Cluster $p, q \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}}$ mit $p \mathcal{T}_{\sim} q$, also $(p, q) \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}_{\sim}}^-$, existieren, deren einziger gemeinsamer Vorfahre die Wurzel $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{T}})$ ist. Dann könnte es vorkommen, dass sich diese beiden Cluster bei einem, wie auch immer gearteten, rekursiven Algorithmus nach dem ersten Aufruf mit den Söhnen der Wurzel in zwei unterschiedlichen Abschnitten der Rekursion befinden. An dieser Stelle wird es jetzt schwer, aus der lokalen Information der Teilbäume auf die benötigte globale zu schließen. Wir verdeutlichen diesen Sachverhalt für die hier vorgeschlagene Idee des Aufstellens von $\mathcal{T}_{\mathcal{T}_{\sim}}^-$ durch das in Abbildung 4.8 gegebenen Beispiel.

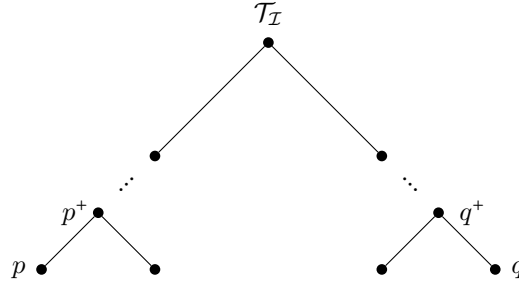


Abbildung 4.8: Clusterbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{T}}$ mit $(p, q) \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}_{\sim}}^-$ und $(p^+, q^+) \in \mathcal{T}_{\mathcal{T}_{\sim}}^-$.

Dort gelte $(p, q) \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}_{\sim}}^-$ mit $\text{level}(p) = \text{level}(q)$ und wir wollen mit der Vererbbarkeit von \mathcal{T}_{\sim} den Block (p^+, q^+) zu der Menge $\mathcal{T}_{\mathcal{T}_{\sim}}^-$ hinzufügen. Wir gehen davon aus, dass ein rekursiver Algorithmus mit dem Teilbaum zur Wurzel p^+ aufgerufen wurde und dort dann $(p, q) \in \mathcal{L}_{\mathcal{T}_{\sim}}^-$ festgestellt wird. Nach Vererbbarkeit (vgl. Lemma 4.2.11) wissen wir

nun $p^+ \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim q^+$ und in diesem Fall dann auch $(p^+, q^+) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}^-$. Beim Verlassen der Rekursion — über $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ — steht uns aber nur der Vater p^+ von p , nicht aber der Vater q^+ von q zur Verfügung. Damit können wir (p^+, q^+) nicht zu der Menge $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^-$ hinzufügen. Die — eigentlich redundante — Verlinkung eines Clusters zu dessen Vater ist für diese Vorgehensweise zum Aufstellen von $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^-$ also essentiell und die entsprechenden Datenstrukturen wurden in der Implementierung deswegen mit dieser Information angereichert.

Wie man an Algorithmus 4.3.8 sieht, ist durch diese Zusatzinformation die Verwendung eines rekursiven Algorithmus nicht mehr notwendig. Wir können uns durch die Verbindungen zu den Vätern aller Cluster direkt von der Menge $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}^-$ bis zur Wurzel des Baums $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^-$ bzw. der Menge $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}^-$ bewegen.

4.3.3 Assemblieren

Bevor wir uns mit möglichen Lösungsstrategien für das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem beschäftigen können, muss dieses zuerst assembliert werden. Für einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, zwei geschachtelte Clusterbasen $(V, E)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $(W, F)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ sowie zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ sind die Koeffizientenmatrizen

$$V_{t'}^* A V_t \quad \text{und} \quad W_{s'}^* B W_s$$

für alle $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $(b', b) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^-$ zu berechnen. Hierbei bezeichne $\succ_{(A,B)}$ die Matrix-Galerkin-Blockrelation bzgl. A und B in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie \succ_A und \succ_B die dieser Blockrelation zugrundeliegenden Matrix-Galerkin-Clusterrelationen. Der überwiegenden Teil der Diskussion dieses Abschnitts wird für Matrix-Galerkin-Clusterrelationen — bzw. Matrix-Galerkin-Blockrelationen — geführt, da nur diese für das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem von Interesse sind. Eine Formulierung mit allgemeinen vererbdbaren Relationen wird nur verwendet, wenn dies ohne Einschränkung möglich ist und es für die Beweise entsprechender Aussagen keinen Mehraufwand bedeutet.

Da die beiden Clusterbasen $(V, E)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $(W, F)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ geschachtelt sind, lassen sich die Matrizen $V_{t'}$ und V_t für $t', t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $t' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ oder $t \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ nicht direkt verwenden, sondern sie müssen über die Familie der Transfermatrizen $E_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ dargestellt werden. Analog gilt dies auch für die Spaltenclusterbasis $(W, F)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$.

Wir betrachten exemplarisch den Fall $t', t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$. Nach Schachtelungseigenschaft der Clusterbasis gelten dann

$$V_{t'} = \sum_{t'^* \in \text{sons}(t')} V_{t'^*} E_{t'^*} \quad \text{und} \quad V_t = \sum_{t^* \in \text{sons}(t)} V_{t^*} E_{t^*}.$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 V_{t'}^* A V_t &= \left(\sum_{t'^* \in \text{sons}(t')} V_{t'^*} E_{t'^*} \right)^* A \left(\sum_{t^* \in \text{sons}(t)} V_{t^*} E_{t^*} \right) \\
 &= \left(\sum_{t'^* \in \text{sons}(t')} E_{t'^*}^* V_{t'^*}^* \right) A \left(\sum_{t^* \in \text{sons}(t)} V_{t^*} E_{t^*} \right) \\
 &= \sum_{t'^* \in \text{sons}(t')} \sum_{t^* \in \text{sons}(t)} E_{t'^*}^* (V_{t'^*}^* A V_{t^*}) E_{t^*}.
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Bevor also $V_{t'}^* A V_t$ berechnet werden kann, müssen die Matrizen $V_{t'^*}^* A V_{t^*}$ für alle $(t'^*, t^*) \in \text{sons}(t') \times \text{sons}(t)$ vorberechnet werden. Gilt dann für eins oder mehrere dieser Tupel wieder $t'^*, t^* \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, so wiederholt sich auch dort die Darstellung (4.52) für $V_{t'^*}^* A V_{t^*}$. Analog gilt

$$W_{s'}^* B W_s = \sum_{s'^* \in \text{sons}(s')} \sum_{s^* \in \text{sons}(s)} F_{s'^*}^* (W_{s'^*}^* B W_{s^*}) F_{s^*} \tag{4.53}$$

für $s', s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$.

Die Matrizen $V_{t'}^* A V_t$ und $W_{s'}^* B W_s$ unterscheiden sich lediglich in der Wahl der Clusterbasis und der zugrundeliegenden Matrix. Aus diesem Grund werden wir uns im Folgenden auf die Betrachtung von Tupeln $(p, q) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $p \succ_A q$, also die Berechnung von

$$V_p^* A V_q$$

zurückziehen. Da die Diskussion für eine allgemeine Matrix $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und eine allgemeine Clusterbasis geführt wird, übertragen sich die Aussagen sowohl auf $V_{t'}^* A V_t$ als auch auf $W_{s'}^* B W_s$.

Neben dem in (4.52) exemplarisch dargestellten Fall zweier Nicht-Blatt-Cluster eines Clusterbaums ergeben sich noch drei weitere Situationen, die wir in der nachstehenden Bemerkung zusammenfassen.

Bemerkung 4.3.32 (Rekursive Darstellung der Koeffizientenmatrizen). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$, $(V, E)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ eine geschachtelte Clusterbasis und $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, dann ergeben sich die folgenden vier Fälle zur Darstellung von $V_p^* A V_q$.*

Fall 1: Gelten $p \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, so kann $V_p^* A V_q$ direkt — also ohne Verwendung von Transformmatrizen — berechnet werden.

Fall 2: Gelten $p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, dann folgt

$$V_p^* A V_q = \left(\sum_{p^* \in \text{sons}(p)} V_{p^*}^* E_{p^*} \right)^* A V_q = \sum_{p^* \in \text{sons}(p)} E_{p^*}^* (V_{p^*}^* A V_q).$$

Fall 3: Gelten $p \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $q \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, dann folgt

$$V_p^* A V_q = V_p^* A \left(\sum_{q^* \in \text{sons}(q)} V_{q^*} E_{q^*} \right) = \sum_{q^* \in \text{sons}(q)} (V_p^* A V_{q^*}) E_{q^*}.$$

Fall 4: Gelten $p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $q \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, dann folgt

$$\begin{aligned} V_p^* A V_q &= \left(\sum_{p^* \in \text{sons}(p)} V_{p^*} E_{p^*} \right)^* A \left(\sum_{q^* \in \text{sons}(q)} V_{q^*} E_{q^*} \right) \\ &= \sum_{p^* \in \text{sons}(p)} \sum_{q^* \in \text{sons}(q)} E_{p^*}^* (V_{p^*}^* A V_{q^*}) E_{q^*}. \end{aligned}$$

Betrachten wir ein Clustertupel $(p, q) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $p, q \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $p \asymp_A q$, dann gilt nach Fall 4 aus Bemerkung 4.3.32

$$V_p^* A V_q = \sum_{(p^*, q^*) \in \text{sons}(p) \times \text{sons}(q)} E_{p^*}^* (V_{p^*}^* A V_{q^*}) E_{q^*}.$$

In der dort auftretenden Summe müssen wir allerdings nur diejenigen $(p^*, q^*) \in \text{sons}(p) \times \text{sons}(q)$ verwenden, für die $p^* \asymp_A q^*$ gilt. Nach Lemma 4.2.4 erfüllen nur diese Tupel potentiell

$$V_{p^*}^* A V_{q^*} \neq 0.$$

Im Kontext von Relationsbäumen — in diesem Fall \mathcal{T}_{\asymp_A} — sind wir also nur an den *unzulässigen Söhnen* eines Blocks interessiert. Aus diesem Grund führen wir hierfür eine allgemeine Bezeichnung ein.

Definition 4.3.33 (Unzulässige Söhne). Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, dann bezeichnen wir für alle $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit

$$\text{sons}^-((t, s)) := \{(t^*, s^*) \in \text{sons}((t, s)) \mid (t^*, s^*) \text{ unzulässig}\}$$

die Menge der unzulässigen Söhne von (t, s) .

Seien $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $p \asymp_A q$, dann gilt in den Fällen

$$\begin{aligned} &\text{level}(p) = \text{level}(q), \\ &\text{level}(p) < \text{level}(q) \text{ mit } p \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \\ &\text{und } \text{level}(p) > \text{level}(q) \text{ mit } q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \end{aligned} \tag{4.54}$$

nach dem Charakterisierungslemma 4.2.22 $(p, q) \in \mathcal{T}_{\asymp_A}^-$. Im Folgenden wird gezeigt, dass alle nötigen Informationen zum Assemblieren von $V_p^* A V_q$ mit $(p, q) \in \mathcal{T}_{\asymp_A}^-$ in der Menge $\mathcal{T}_{\asymp_A}^-$ vorhanden sind.

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

Es existieren nun allerdings noch zwei weitere Fälle, die nicht durch (4.54) abgedeckt sind. Diese lauten

$$\begin{aligned} & \text{level}(p) < \text{level}(q) \text{ mit } p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \\ \text{und} \quad & \text{level}(p) > \text{level}(q) \text{ mit } q \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Diese Fälle treten zum Beispiel bei einem Element $(b', b) \in \mathcal{L}_{\sim(A,B)}^-$ auf, bei dem $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ oder $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ gilt. Dort können dann der entsprechende Zeilen- oder Spaltencluster ein Nicht-Blatt-Cluster des jeweiligen Baums sein. Diese Situation ist exemplarisch in Abbildung 4.9 illustriert.

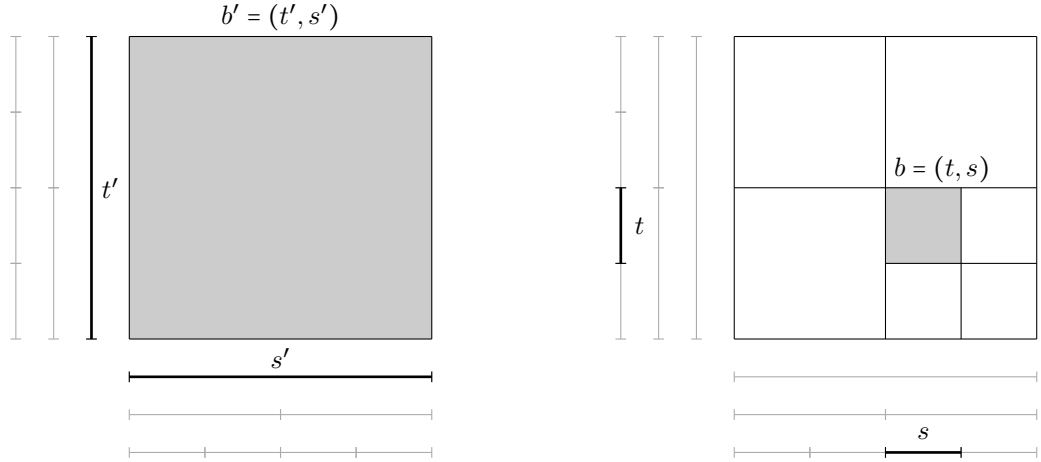


Abbildung 4.9: Blöcke $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $(b', b) \in \mathcal{L}_{\sim(A,B)}^-$, bei denen $\text{level}(t') < \text{level}(t)$ mit $t' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $\text{level}(s') < \text{level}(s)$ mit $s' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$ gilt.

Bei dem Vorliegen eines der beiden Fälle aus (4.55) ist die Idee, bei dem Cluster mit niedrigerem Level rekursiv die Nachfahren zu beschreiben, die mit dem Cluster auf dem höheren Level in Relation stehen. Wir werden zeigen, dass nur diese für das Assemblieren von Interesse sind. Der Cluster auf dem höheren Level bleibt also für die gesamte Betrachtung fest. Wie oben erwähnt, werden wir zeigen, dass zum Assemblieren der Interaktionsmatrizen in $\mathcal{T}_{\sim_A}^-$ alle hierzu benötigten Informationen bereits in der Menge $\mathcal{T}_{\sim_A}^-$ vorhanden sind. Aus diesem Grund können wir beim rekursiven Abstieg aufhören, weitere Nachfahren des Clusters mit dem niedrigeren Level zu untersuchen, sobald einer dieser Nachfahren zusammen mit dem Cluster auf dem höheren Level einen Block aus $\mathcal{T}_{\sim_A}^-$ bildet.

Wir betrachten exemplarisch den Fall $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $\text{level}(p) < \text{level}(q)$ und $p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$. Wie vorher beschrieben, liegt das Interesse hierbei auf den in Abbildung 4.10 gegebenen Teilclusterbäumen von $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$. Der Teilclusterbaum für den Cluster p (Abbildung 4.10 links) besteht aus allen Nachfahren von p , die einen höheren Level als q aufweisen oder zusammen mit q einen Block in $\mathcal{T}_{\sim_A}^-$ bilden. Dies sind neben p die Cluster p_i für alle $i \in \{1, \dots, 6\}$. Der andere Teilclusterbaum (Abbildung 4.10 rechts) besteht hingegen nur

aus dem Cluster q — dieser ist also ein konstanter Clusterbaum im Sinne von Definition 4.3.12.

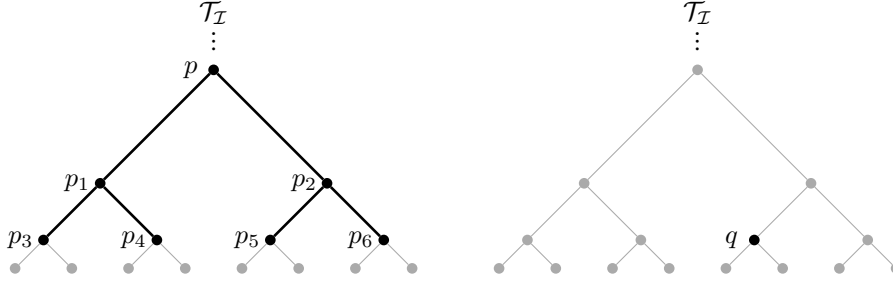


Abbildung 4.10: Teilbäume für $p \in \mathcal{T}_I \setminus \mathcal{L}_I$ (links) und $q \in \mathcal{T}_I$ (rechts) mit $\text{level}(p) < \text{level}(q)$, die für das Assemblieren betrachtet werden müssen.

Wir werden nun nachstehend einen Clusterbaum definieren, der einen *Abschnitt* eines gegebenen Clusterbaums beschreibt. Zusammen mit dem vorher erwähnten konstanten Clusterbaum bildet dieser dann die Grundlage eines Blockbaums — *Assemblierungsbaum* genannt —, der diejenigen Tupel beschreibt, welche für das Assemblieren in einem der beiden Fälle aus (4.55) benötigt werden.

Definition 4.3.34 (Abschnittsbaum). Seien \mathcal{T}_I ein Clusterbaum sowie $p, q \in \mathcal{T}_I$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{T}_{p,q}$ den Teilclusterbaum von \mathcal{T}_I , dessen Wurzel durch $\text{root}(\mathcal{T}_{p,q}) := p$ und die Söhne für alle $p^* \in \mathcal{T}_{p,q}$ durch

$$\text{sons}^*(p^*) := \begin{cases} \emptyset & , \text{ falls } \text{level}(p^*) = \text{level}(q), \\ \text{sons}(p^*) & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert sind. $\mathcal{T}_{p,q}$ nennen wir einen Abschnittsbaum bzgl. p und q — bzw. einfach nur einen Abschnittsbaum, wenn die Zugehörigkeit zu den Clustern p und q aus dem Zusammenhang ersichtlich ist.

Bemerkung 4.3.35 (Clusterbaum). In der Definition 4.3.34 wird implizit angenommen, dass der dort definierte Abschnittsbaum einen Clusterbaum im Sinne von Definition 3.1.1 darstellt. Da sich die einen Clusterbaum definierenden Eigenschaften aus den Eigenschaften des zugrundeliegenden Clusterbaums \mathcal{T}_I ableiten lassen, wird an dieser Stelle darauf verzichtet, diese gesondert nachzuweisen. Des Weiteren sei darauf hingewiesen, dass in einem Abschnittsbaum $\mathcal{T}_{p,q}$ mit $p, q \in \mathcal{T}_I$ für alle Blätter $p^* \in \mathcal{L}_{p,q}$

$$\text{level}(p^*) = \text{level}(p) \quad \text{oder} \quad \text{sons}(p^*) = \emptyset$$

gilt.

Definition 4.3.36 (Assemblierungsbaum). Sei \mathcal{T}_I ein Clusterbaum, $\tau_I \sim$ eine Relation in \mathcal{T}_I sowie $p, q \in \mathcal{T}_I$. Wir nennen $\mathcal{T}_{p,q,\tau_I \sim}$ einen Assemblierungsbaum, wenn $\mathcal{T}_{p,q,\tau_I \sim}$ ein zulässiger Blockbaum für $\mathcal{T}_{p,q}$ und $\bar{\mathcal{T}}_q$ mit der Zulässigkeitsbedingung

$$(p^*, q) \text{ zulässig} \quad :\Leftrightarrow \quad p^* \tau_I \not\sim q$$

für alle $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p,q} \times \bar{\mathcal{T}}_q$ ist. Die Menge der Söhne eines Blocks $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_\mathcal{I}} \sim$ bezeichnen wir im Folgenden mit $\text{sons}_\mathcal{A}((p^*, q))$.

In Abbildung 4.11 sind für $p, q \in \mathcal{T}_\mathcal{I}$ mit $\text{level}(p) < \text{level}(q)$ mit $p \notin \mathcal{L}_\mathcal{I}$ exemplarisch diejenigen Cluster des Abschnittsbaums $\mathcal{T}_{p,q}$ markiert, die zusammen mit q unzulässig sind. Es gilt also

$$p_i \asymp_A q \quad \text{für alle } i \in \{1, 2, 4, 6\}$$

sowie $\text{level}(p_4) = \text{level}(q)$ und $\text{level}(p_6) = \text{level}(q)$, womit diese Blöcke nicht weiter unterteilt werden, da für die Söhne $\text{sons}^*(p_4) = \emptyset = \text{sons}^*(p_6)$ gilt. Die Tupel $(p_4, q), (p_6, q)$ sind dann gerade die unzulässigen Blätter in $\mathcal{T}_{p,q,\asymp_A}$.

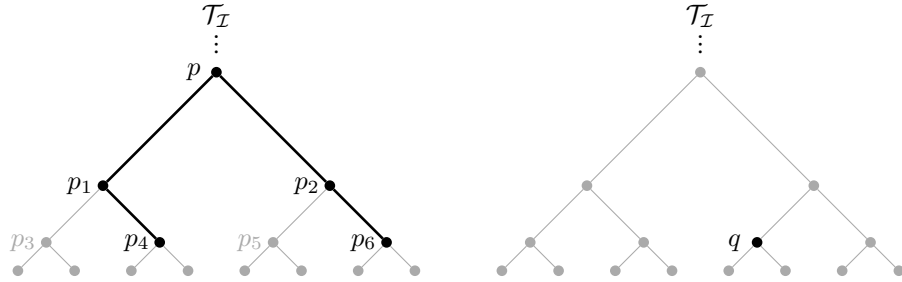


Abbildung 4.11: Darstellung unzulässiger Blöcke $(p_1, q), (p_2, q), (p_4, q), (p_6, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\asymp_A}$ für $p, q \in \mathcal{T}_\mathcal{I}$ mit $\text{level}(p) < \text{level}(q)$ und $p \notin \mathcal{L}_\mathcal{I}$.

In Analogie zu dem Charakterisierungslemma 4.2.22 für Relationsbäume, werden wir mit dem folgenden Lemma die unzulässigen Blöcke in Assemblierungsbäumen beschreiben.

Lemma 4.3.37 (Charakterisierung). *Seien $\mathcal{T}_\mathcal{I}$ ein Clusterbaum, $\mathcal{T}_\mathcal{I} \sim$ eine in $\mathcal{T}_\mathcal{I}$ vererbte Relation sowie $p, q \in \mathcal{T}_\mathcal{I}$ mit $p \mathcal{T}_\mathcal{I} \sim q$, $\text{level}(p) < \text{level}(q)$ und $p \notin \mathcal{L}_\mathcal{I}$, dann gilt $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_\mathcal{I}}^-$ genau dann, wenn $(p^*, q) \in \text{sons}^*(p) \times \{q\}$ mit $p^* \mathcal{T}_\mathcal{I} \sim q$ und $\text{level}(p^*) \leq \text{level}(q)$.*

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_\mathcal{I}}^-$, dann ist (p^*, q) unzulässig, womit $p^* \mathcal{T}_\mathcal{I} \sim q$ folgt. Aufgrund von $q \in \{q\}$ bleiben $p^* \in \text{sons}^*(p)$ und $\text{level}(p^*) \leq \text{level}(q)$ zu zeigen.

Da $\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_\mathcal{I}} \sim$ ein Baum ist, existiert ein Pfad

$$((p_0, q_0), \dots, (p_n, q_n))$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ von $\text{root}(\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_\mathcal{I}} \sim) = (p, q)$ nach (p^*, q) in $\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_\mathcal{I}} \sim$. Durch die Definition der Söhne folgt

$$(p_i, q_i) \in \text{sons}_\mathcal{A}((p_{i-1}, q_{i-1})) = \text{sons}^*(p_{i-1}) \times \{q_{i-1}\}$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und damit $\text{sons}^*(p_{i-1}) \neq \emptyset$, also $\text{sons}^*(p_{i-1}) = \text{sons}(p_{i-1})$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Somit ist (p_0, \dots, p_n) ein Pfad von p nach p^* in $\mathcal{T}_\mathcal{I}$ und damit $p^* \in \text{sons}^*(p)$ gezeigt.

Angenommen es gilt $\text{level}(p_n) = \text{level}(p^*) > \text{level}(q)$, dann folgen mit der Voraussetzung $\text{level}(p_0) = \text{level}(p) < \text{level}(q)$ die Ungleichungen

$$\text{level}(p_1) \leq \text{level}(q) \leq \text{level}(p_{n-1}),$$

also insbesondere $n \geq 2$. Somit existiert ein $i \in \{1, \dots, n-1\}$ mit

$$\text{level}(p_i) = \text{level}(q).$$

Für p_i folgt dann $\text{sons}^*(p_i) = \emptyset$, was mit $i+1 \leq n$ im Widerspruch zu $p_{i+1} \in \text{sons}^*(p_i)$ steht. Die Annahme war also falsch und es folgt $\text{level}(p^*) \leq \text{level}(q)$.

„ \Leftarrow “: Sei $(p^*, q) \in \text{sons}^*(p) \times \{q\}$ mit $p^* \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim q$ und $\text{level}(p^*) \leq \text{level}(q)$, dann existiert ein Pfad

$$(p_0, \dots, p_n)$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ von p nach p^* in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$. Nach Vererbbarkeit von $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ und $p^* \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim q$ gilt

$$p_i \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim q \quad \text{für alle } i \in \{0, \dots, n\}. \quad (4.56)$$

Wir zeigen nun per Induktion, dass $(p_i, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim}^-$ für alle $i \in \{0, \dots, n\}$ gilt.

Für $i = 0$ folgt $(p_0, q) = (p, q) = \text{root}(\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim}) \in \mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim}$ und mit $p_0 \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim q$ (siehe (4.56)) auch $(p_0, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim}^-$.

Sei nun $i \in \{0, \dots, n-1\}$ so gegeben, dass $(p_i, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim}^-$ gilt. Mit $p_{i+1} \in \text{sons}(p_i) \neq \emptyset$ folgt dann

$$\text{level}(p_i) < \text{level}(p_{i+1}) \leq \text{level}(p_n) = \text{level}(p^*) \leq \text{level}(q),$$

also zusammen

$$\text{level}(p_i) \neq \text{level}(q) \quad \text{und} \quad \text{sons}(p_i) \neq \emptyset.$$

Es folgt somit $\emptyset \neq \text{sons}(p_i) = \text{sons}^*(p_i)$. Da (p_i, q) in $\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim}$ unzulässig ist, besitzt dieser Block Söhne und es gilt

$$(p_{i+1}, q) \in \text{sons}(p_i) \times \{q\} = \text{sons}^*(p_i) \times \{q\} = \text{sons}_{\mathcal{A}}((p_i, q)) \subseteq \mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim}.$$

Mit (4.56) gilt $p_{i+1} \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim q$ und damit die Unzulässigkeit von (p_{i+1}, q) in $\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim}$, also $(p_{i+1}, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim}^-$.

Die Induktion ist somit vollständig, womit insbesondere die zu beweisende Aussage

$$(p^*, q) = (p_n, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim}^-$$

folgt. □

Mit der Aussage aus Lemma 4.3.37 lässt sich nun speziell für die unzulässigen Blätter eines Assemblierungsbaums zeigen, dass sich diese bereits in der Menge aller unzulässigen Blöcke des zugrundeliegenden Relationsbaums befinden. Diesen Sachverhalt verdeutlicht das folgende Korollar.

Korollar 4.3.38 (Unzulässige Blätter). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ eine in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ vererbte Relation sowie $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $p \tau_{\mathcal{I}} \sim q$, $\text{level}(p) < \text{level}(q)$ und $p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, dann gilt $(p^*, q) \in \mathcal{L}_{p,q,\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$ genau dann, wenn $(p^*, q) \in \text{sons}^*(p) \times \{q\}$ mit $\text{level}(p^*) \leq \text{level}(q)$ und $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$.*

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei $(p^*, q) \in \mathcal{L}_{p,q,\tau_{\mathcal{I}} \sim}^- \subseteq \mathcal{T}_{p,q,\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$, dann gilt nach Lemma 4.3.37 $(p^*, q) \in \text{sons}^*(p) \times \{q\}$ mit $p^* \tau_{\mathcal{I}} \sim q$ und $\text{level}(p^*) \leq \text{level}(q)$. Da (p^*, q) ein unzulässiges Blatt in $\mathcal{T}_{p,q,\tau_{\mathcal{I}} \sim}$ ist, gilt $\text{sons}^*(p^*) = \emptyset$. Nach Definition der Söhne in einem Abschnittsbaum treten nun potentiell zwei Fälle auf. Gilt $\text{level}(p^*) = \text{level}(q)$, so folgt aus $p^* \tau_{\mathcal{I}} \sim q$ nach dem Charakterisierungslemma 4.2.22 $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$, also die Behauptung. Es gelte also $\emptyset = \text{sons}^*(p^*) = \text{sons}(p^*)$, dann folgt $p^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$. Zusammen mit

$$\text{level}(p^*) \leq \text{level}(q) \quad \text{und} \quad p^* \tau_{\mathcal{I}} \sim q$$

bedeutet dies wieder nach dem Charakterisierungslemma 4.2.22 — es gilt dort entweder (i) oder (iii) — $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$, womit auch in diesem Fall die Aussage folgt.

„ \Leftarrow “: Seien $(p^*, q) \in \text{sons}^*(p) \times \{q\}$ mit $\text{level}(p^*) \leq \text{level}(q)$ und $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$, dann gilt insbesondere $p^* \tau_{\mathcal{I}} \sim q$ und damit nach Lemma 4.3.37 $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$. Gilt $\text{level}(p^*) = \text{level}(q)$, so folgt $\text{sons}^*(p^*) = \emptyset$ und im Fall von $\text{level}(p^*) < \text{level}(q)$ liefert $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$ die Aussage $p^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ (vgl. Lemma 3.2.6), also ebenfalls $\text{sons}^*(p^*) = \text{sons}(p^*) = \emptyset$. Insgesamt gilt damit $\text{sons}_{\mathcal{A}}((p^*, q)) = \emptyset$, was $(p^*, q) \in \mathcal{L}_{p,q,\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$ bedeutet. \square

Betrachten wir wieder die beiden Fälle aus (4.55) im Bezug auf die Matrix-Galerkin-Clusterrelation \asymp_A . Für den Fall $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $p \asymp_A q$ sowie

$$\text{level}(p) < \text{level}(q) \quad \text{und} \quad p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$$

wird im weiteren Verlauf gezeigt, dass alle zum Assemblieren von $V_p^* A V_q$ benötigten Information in der Teilmenge $\mathcal{T}_{p,q,\asymp_A}^-$ des Assemblierungsbaums vorhanden sind. Der Assemblierungsbaum

$$\mathcal{T}_{p,q,\asymp_A} \tag{4.57}$$

beschreibt also den ersten Fall aus (4.55). Wir sind bei Assemblierungsbaumen somit an der Koeffizientenmatrix interessiert, die durch die Wurzel dieses Baums definiert wird. Betrachten wir nun den Fall $p \asymp_A q$ mit

$$\text{level}(p) > \text{level}(q) \quad \text{und} \quad q \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}},$$

dann gilt mit der transponierten Relation

$$p \asymp_A q \quad \Leftrightarrow \quad q \asymp_A^T p.$$

Auch hier wird nachgewiesen, dass sich die gewünschte Koeffizientenmatrix $V_p^* A V_q$ unter Zuhilfenahme des Assemblierungsbaums

$$\mathcal{T}_{q,p,\asymp_A^T} \tag{4.58}$$

— bzw. genauer gesagt der Menge $\mathcal{T}_{q,p,\prec_A}^-$ — berechnen lässt. Es genügt also, den Baum aus (4.57) zu analysieren bzw. Algorithmen zum Assemblieren in diesem anzugeben, da sich dann die entsprechenden Aussagen auf (4.58) übertragen. Alle Algorithmen müssen somit für diesen Fall lediglich mit der transponierten Matrix aufgerufen werden. Die Koeffizientenmatrix lässt sich — wie noch gezeigt wird — durch das Transponieren der algorithmisch berechneten Matrix rekonstruieren.

Interaktionsmatrizen

Im Folgenden werden nun sogenannte *Interaktionsmatrizen* induktiv definiert, Algorithmen angegeben, die diese berechnen, und es wird nachgewiesen, dass die so assemblierten Matrizen den gewünschten Koeffizientenmatrizen des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems entsprechen. Wie vorher motiviert, sind — je nach vorliegendem Fall aus (4.54) bzw. (4.55) — die Matrizen $V_p^* A V_q$ zu berechnen, wobei die Cluster p und q zusammen entweder einen Block aus $\mathcal{T}_{\prec_A}^-$ oder die Wurzel eines Assemblierungsbaums — $\mathcal{T}_{p,q,\prec_A}$ bzw. $\mathcal{T}_{q,p,\prec_A}^T$ — bilden.

Definition 4.3.39 (Interaktionsmatrix in einem Relationsbaum). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$, $(V, E)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ eine geschachtelte Clusterbasis und \prec_A die Matrix-Galerkin-Clusterrelation bzgl. A in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, dann nennen wir für alle $(p, q) \in \mathcal{T}_{\prec_A}^-$ die Matrix*

$$A_{p,q} := \begin{cases} \sum_{(p^*, q^*) \in \text{sons}^-((p,q))} E_{p^*}^* A_{p^*, q^*} E_{q^*} & , \text{ falls } p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \text{ und } q \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \\ \sum_{(p^*, q^*) \in \text{sons}^-((p,q))} E_{p^*}^* A_{p^*, q^*} & , \text{ falls } p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \text{ und } q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \\ \sum_{(p^*, q^*) \in \text{sons}^-((p,q))} A_{p^*, q^*} E_{q^*} & , \text{ falls } p \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \text{ und } q \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \\ V_p^* A V_q & \text{sonst, also falls } p, q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}, \end{cases}$$

Interaktionsmatrix von (p, q) in $\mathcal{T}_{\prec_A}^-$.

In der Definition 4.3.39 sind für alle Blätter $p, q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ die Matrizen V_p und V_q der Clusterbasis direkt verfügbar und $A_{p,q} = V_p^* A V_q$ deswegen explizit berechenbar. Aus diesem Grund sind die dort definierten Interaktionsmatrizen $A_{p,q}$ für alle $(p, q) \in \mathcal{T}_{\prec_A}^-$ wohldefiniert.

Wir werden nun nachweisen, dass die oben für einen Relationsbaum eingeführten Interaktionsmatrizen gerade den Koeffizientenmatrizen des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems entsprechen.

Lemma 4.3.40 (Interaktionsmatrix). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$, $(V, E)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ eine geschachtelte Clusterbasis und \prec_A die Matrix-Galerkin-Clusterrelation bzgl. A in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, dann gilt $A_{p,q} = V_p^* A V_q$ für alle $(p, q) \in \mathcal{T}_{\prec_A}^-$.*

Beweis. Wir führen den Beweis per Induktion über $\# \text{sons}^*((p, q)) \in \mathbb{N}$ für alle $(p, q) \in \mathcal{T}_{\prec_A}^-$.

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

Es sei dafür zuerst $(p, q) \in \mathcal{T}_{\succ_A}^-$ mit $\text{sons}^*((p, q)) = 1$, dann folgt $(p, q) \in \mathcal{L}_{\succ_A}^-$, also $p, q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$. Nach Definition folgt $A_{p,q} = V_p^* AV_q$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ so gegeben, dass $A_{p,q} = V_p^* AV_q$ für alle $(p, q) \in \mathcal{T}_{\succ_A}^-$ mit $\text{sons}^*((p, q)) \leq n$ gilt.

Für $(p, q) \in \mathcal{T}_{\succ_A}^-$ mit $\text{sons}^*((p, q)) = n + 1 \geq 2$ gilt $\text{sons}((p, q)) \neq \emptyset$. Wir betrachten $(p^*, q^*) \in \text{sons}((p, q))$, dann gilt $(p, q) \notin \text{sons}^*((p^*, q^*))$ und zusammen mit $(p, q) \in \text{sons}^*((p, q))$ folgt dann

$$\# \text{sons}^*((p^*, q^*)) \leq \# \text{sons}^*((p, q)) - 1 = n + 1 - 1 = n.$$

Die Induktionsvoraussetzung liefert somit für alle

$$(p^*, q^*) \in \text{sons}^-((p, q)) \subseteq \text{sons}((p, q)) \subseteq \mathcal{T}_{\succ_A}^-$$

die Gleichheit $A_{p^*, q^*} = V_{p^*}^* AV_{q^*}$. In den folgenden drei Fällen verwenden wir die Schachtelungseigenschaft der Clusterbasis (vgl. Bemerkung 4.3.32) sowie die Tatsache, dass für das Assemblieren nur die unzulässigen Söhne eines Blocks von Interesse sind (vgl. Lemma 4.2.4).

Fall 1: Es gilt $p, q \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$.

In diesem Fall gilt $\text{sons}((p, q)) = \text{sons}(p) \times \text{sons}(q)$ und damit

$$\begin{aligned} V_p^* AV_q &= \sum_{p^* \in \text{sons}(p)} \sum_{q^* \in \text{sons}(q)} E_{p^*}^*(V_{p^*}^* AV_{q^*}) E_{q^*} \\ &= \sum_{(p^*, q^*) \in \text{sons}((p, q))} E_{p^*}^*(V_{p^*}^* AV_{q^*}) E_{q^*} \\ &= \sum_{(p^*, q^*) \in \text{sons}^-((p, q))} E_{p^*}^*(V_{p^*}^* AV_{q^*}) E_{q^*} \\ &= \sum_{(p^*, q^*) \in \text{sons}^-((p, q))} E_{p^*}^* A_{p^*, q^*} E_{q^*} = A_{p, q}. \end{aligned}$$

Fall 2: Es gilt $p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}, q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$.

In diesem Fall gilt $\text{sons}((p, q)) = \text{sons}(p) \times \{q\}$ und damit

$$\begin{aligned} V_p^* AV_q &= \sum_{p^* \in \text{sons}(p)} E_{p^*}^*(V_{p^*}^* AV_q) = \sum_{(p^*, q^*) \in \text{sons}((p, q))} E_{p^*}^*(V_{p^*}^* AV_{q^*}) \\ &= \sum_{(p^*, q^*) \in \text{sons}^-((p, q))} E_{p^*}^*(V_{p^*}^* AV_{q^*}) = \sum_{(p^*, q^*) \in \text{sons}^-((p, q))} E_{p^*}^* A_{p^*, q^*} \\ &= A_{p, q}. \end{aligned}$$

Fall 3: Es gilt $p \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}, q \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$.

In diesem Fall gilt $\text{sons}((p, q)) = \{p\} \times \text{sons}(q)$ und damit

$$\begin{aligned} V_p^* A V_q &= \sum_{q^* \in \text{sons}(q)} (V_p^* A V_{q^*}) E_{q^*} = \sum_{(p^*, q^*) \in \text{sons}((p, q))} (V_p^* A V_{q^*}) E_{q^*} \\ &= \sum_{(p^*, q^*) \in \text{sons}^-(p, q)} (V_p^* A V_{q^*}) E_{q^*} = \sum_{(p^*, q^*) \in \text{sons}^-(p, q)} A_{p^*, q^*} E_{q^*} \\ &= A_{p, q}. \end{aligned}$$

Es folgt somit die Aussage. \square

Die Interaktionsmatrizen für die unzulässigen Blöcke eines Assemblierungsbaums definieren wir induktiv wie folgt.

Definition 4.3.41 (Interaktionsmatrix in einem Assemblierungsbaum). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$, $(V, E)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ eine geschachtelte Clusterbasis und \succsim_A die Matrix-Galerkin-Clusterrelation bzgl. A in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$. Seien weiter $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $p \succsim_A q$, $\text{level}(p) < \text{level}(q)$ und $p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, dann nennen wir für alle $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p, q, \succsim_A}^-$ die Matrix*

$$A_{p^*, q} := \begin{cases} V_p^* A V_q & , \text{ falls } \text{sons}_{\mathcal{A}}((p^*, q)) = \emptyset, \\ \sum_{(p^{**}, q) \in \text{sons}_{\mathcal{A}}^-(p^*, q)} E_{p^{**}} A_{p^{**}, q} & \text{ sonst,} \end{cases}$$

Interaktionsmatrix von (p^*, q) in $\mathcal{T}_{p, q, \succsim_A}^-$.

Betrachten wir den ersten Fall aus der Definition 4.3.41 einer Interaktionsmatrix eines Assemblierungsbaums, also einen Block $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p, q, \succsim_A}^-$ mit $\text{sons}_{\mathcal{A}}((p^*, q)) = \emptyset$, dann ist dies ein unzulässiges Blatt. Nach Korollar 4.3.38 folgt dann $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{\succsim_A}^-$, womit Lemma 4.3.40 die Gleichheit $A_{p^*, q} = V_p^* A V_q$ liefert. Aus diesem Grund sind die Interaktionsmatrizen in Assemblierungsbäumen wohldefiniert.

Bei einem Assemblierungsbaum sind wir an der durch die Wurzel dieses Baums definierten Koeffizientenmatrix interessiert. Das nachstehende Lemma zeigt, dass alle zum Assemblieren dieser Matrix benötigten Informationen durch die unzulässigen Blöcke des entsprechenden Assemblierungsbaums gegeben sind. Wie oben diskutiert, bildet Lemma 4.3.42 (a) dabei den ersten Fall aus (4.55) und Lemma 4.3.42 (b) den zweiten Fall aus (4.55) ab.

Lemma 4.3.42 (Interaktionsmatrix). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$, $(V, E)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ eine geschachtelte Clusterbasis, \succsim_A die Matrix-Galerkin-Clusterrelation bzgl. A in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ sowie $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $p \succsim_A q$.*

- (a) *Falls $\text{level}(p) < \text{level}(q)$ mit $p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ gilt, folgt $A_{p^*, q} = V_p^* A V_q$ für alle $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p, q, \succsim_A}^-$.*
- (b) *Falls $\text{level}(p) > \text{level}(q)$ mit $q \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ gilt, folgt $(A_{q^*, p}^*)^* = V_p^* A V_{q^*}$ für alle $(q^*, p) \in \mathcal{T}_{q, p, \succsim_A^T}^-$.*

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

Beweis. (a) Es gelte $\text{level}(p) < \text{level}(q)$ mit $p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$. Wir beweisen diese Aussage per Induktion über $\text{sons}_{\mathcal{A}}^*((p^*, q)) \in \mathbb{N}$ für alle $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\prec_A}^-$.

Für $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\prec_A}^-$ mit $\#\text{sons}_{\mathcal{A}}^*((p^*, q)) = 1$ folgt $\text{sons}_{\mathcal{A}}((p^*, q)) = \emptyset$ und nach Definition damit $A_{p^*,q} = V_{p^*}^* AV_q$. Man beachte hier, dass (p^*, q) ein unzulässiges Blatt in $\mathcal{T}_{p,q,\prec_A}$ ist, was nach Korollar 4.3.38 die Aussage $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{\prec_A}^-$ und damit nach Lemma 4.3.40 $A_{p^*,q} = V_{p^*}^* AV_q$ liefert.

Sei $n \in \mathbb{N}$ so gegeben, dass die Gleichheit $A_{p^*,q} = V_{p^*}^* AV_q$ für alle $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\prec_A}^-$ mit $\#\text{sons}_{\mathcal{A}}^*((p^*, q)) \leq n$ gilt.

Für $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\prec_A}^-$ mit $\text{sons}_{\mathcal{A}}^*((p^*, q)) = n + 1 \geq 2$ gilt $\text{sons}_{\mathcal{A}}((p^*, q)) \neq \emptyset$. Sei $(p^{**}, q) \in \text{sons}_{\mathcal{A}}((p^*, q))$, dann gilt $(p^*, q) \in \text{sons}_{\mathcal{A}}^*((p^*, q))$ und $(p^*, q) \notin \text{sons}_{\mathcal{A}}^*((p^{**}, q))$, also

$$\#\text{sons}_{\mathcal{A}}^*((p^{**}, q)) \leq \#\text{sons}_{\mathcal{A}}^*((p^*, q)) - 1 = n + 1 - 1 = n.$$

Mit der Induktionsvoraussetzung folgt damit die Darstellung $A_{p^{**},q} = V_{p^{**}}^* AV_q$ für alle Elemente $(p^{**}, q) \in \text{sons}_{\mathcal{A}}^-(p^*, q) \subseteq \text{sons}_{\mathcal{A}}((p^*, q)) \subseteq \mathcal{T}_{p,q,\prec_A}^-$.

Da $\text{sons}_{\mathcal{A}}((p^*, q)) \neq \emptyset$ gilt, folgt $\emptyset \neq \text{sons}(p^*) = \text{sons}(p^*)$, also $\text{sons}_{\mathcal{A}}((p^*, q)) = \text{sons}(p^*) \times \{q\}$. Nach Schachtelungseigenschaft der Clusterbasis und Lemma 4.2.4 folgt

$$\begin{aligned} V_{p^*}^* AV_q &= \sum_{p^{**} \in \text{sons}(p^*)} E_{p^{**}}^*(V_{p^{**}}^* AV_q) = \sum_{(p^{**}, q) \in \text{sons}_{\mathcal{A}}((p^*, q))} E_{p^{**}}^*(V_{p^{**}}^* AV_q) \\ &= \sum_{(p^{**}, q) \in \text{sons}_{\mathcal{A}}^-(p^*, q)} E_{p^{**}}^*(V_{p^{**}}^* AV_q) = \sum_{(p^{**}, q) \in \text{sons}_{\mathcal{A}}^-(p^*, q)} E_{p^{**}}^* A_{p^{**},q} \\ &= A_{p^*,q} \end{aligned}$$

und damit die Aussage.

(b) Es gelte $\text{level}(p) > \text{level}(q)$ mit $q \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$. Aus $p \prec_A q$ folgt $q \prec_A^T p$ und damit nach Korollar 4.2.29 $q \prec_{A^*} p$. Wir können also den Teil (a) dieses Lemmas auf die Matrix $A^* \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und die Matrix-Galerkin-Clusterrelation \prec_{A^*} bzgl. A^* in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ anwenden. Sei also $(q^*, p) \in \mathcal{T}_{q,p,\prec_A}^-$ und damit $(q^*, p) \in \mathcal{T}_{q,p,\prec_{A^*}}^-$, dann folgt mit Teil (a) $A_{q^*,p}^* = V_{q^*}^* A^* V_p$ und damit

$$(A_{q^*,p}^*)^* = (V_{q^*}^* A^* V_p)^* = V_p^* AV_{q^*}.$$

□

Bemerkung 4.3.43 (Transponierte Matrix). *Es seien die Voraussetzungen von Lemma 4.3.42 gegeben, dann benötigen wir im Fall von $\text{level}(p) > \text{level}(q)$ mit $q \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ zum Assemblieren aller Interaktionsmatrizen in $\mathcal{T}_{q,p,\prec_A}^-$ die Matrizen $A_{q^*,p}^*$ für alle*

$$(q^*, p) \in \mathcal{T}_{q,p,\prec_A}^- \quad \text{mit} \quad \text{sons}_{\mathcal{A}}((q^*, p)) = \emptyset$$

(vgl. Definition 4.3.41) — also für alle unzulässigen Blätter dieses Assemblierungsbaums. Nach Korollar 4.3.38 gilt für so einen Block aus $\mathcal{L}_{q,p,\prec_A}^-$ gerade $(q^*, p) \in \mathcal{T}_{\prec_A}^-$, also mit

dem transponierten Blockbaum $(p, q^*) \in \mathcal{T}_{\prec_A}^-$ (vgl. Lemma 4.2.28). Damit lässt sich in diesem Fall die Matrix $A_{q^*, p}^*$ durch

$$(A_{p, q^*})^* = (V_p^* A V_{q^*})^* = V_{q^*}^* A^* V_p = A_{q^*, p}^*$$

aus dem Matrix-Galerkin-Clusterrelationsbaum \mathcal{T}_{\prec_A} gewinnen. Die Grundlage zum Assemblieren in $\mathcal{T}_{q, p, \prec_A^T}^-$ ist also — wie auch für den Fall aus Lemma 4.3.42 (a) — durch $\mathcal{T}_{\prec_A}^-$ gegeben.

Bemerkung 4.3.44 (Hilfsinteraktionsmatrizen). Wie schon erwähnt, ist bezogen auf das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem bei Vorliegen eines der beiden Fälle aus (4.55) — also eines der beiden Fälle aus Lemma 4.3.42 — nur die Interaktionsmatrix für die Wurzel des entsprechenden Assemblierungsbaums von Interesse. Alle anderen dort berechneten Interaktionsmatrizen dienen einzig und allein dem Zweck, diese eine Matrix berechnen zu können. Dieses Vorhandensein von Hilfsinteraktionsmatrizen ist allerdings auch schon bei der durch die vom eigentlichen Matrix-Galerkin-Gleichungssystem abgekoppelten Betrachtung von Relationsbäumen gegeben. Dort werden später beim konkreten Assemblieren auch Matrizen berechnet, die für dieses System nur implizit benötigt werden. Es kann potentiell sogar der Fall auftreten, dass Interaktionsmatrizen aufgestellt werden, die weder als Koeffizientenmatrix noch als Hilfsgröße Verwendung finden. Diese Tatsache liegt wieder — wie auch schon in vorherigen Abschnitten — in der Vernachlässigung der dem Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ zugrundeliegenden Zulässigkeitsbedingung begründet.

Wir sind nun theoretisch in der Lage, das komplette Matrix-Galerkin-Gleichungssystem zu assemblieren. Bevor wir uns der konkreten Formulierung von Algorithmen widmen, fassen wir die Aussagen der vorherigen Diskussion in dem folgenden Satz zusammen.

Satz 4.3.45 (Vollständige Beschreibung). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ zwei Matrizen, $\prec_{(A, B)}$ die Matrix-Galerkin-Blockrelation bzgl. A und B in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie \prec_A und \prec_B die dieser Blockrelation zugrundeliegenden Matrix-Galerkin-Clusterrelationen. Seien weiter $V_{\mathcal{I}}$ und $W_{\mathcal{J}}$ zwei geschachtelte Clusterbasen sowie $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $(b', b) \in \mathcal{L}_{\prec_{(A, B)}}^-$, dann gelten

$$(A1) \quad (t', t) \in \mathcal{T}_{\prec_A}^- \text{ und } A_{t', t} = V_{t'}^* A V_t \text{ oder}$$

$$(A2) \quad (t', t) = \text{root}(\mathcal{T}_{t', t, \prec_A}) \in \mathcal{T}_{t', t, \prec_A}^- \text{ und } A_{t', t} = V_{t'}^* A V_t \text{ oder}$$

$$(A3) \quad (t, t') = \text{root}(\mathcal{T}_{t, t', \prec_A^T}) \in \mathcal{T}_{t, t', \prec_A^T}^- \text{ und } (A_{t, t'}^*)^* = V_{t'}^* A V_t$$

sowie

$$(B1) \quad (s', s) \in \mathcal{T}_{\prec_B}^- \text{ und } B_{s', s} = W_{s'}^* B W_s \text{ oder}$$

$$(B2) \quad (s', s) = \text{root}(\mathcal{T}_{s', s, \prec_B}) \in \mathcal{T}_{s', s, \prec_B}^- \text{ und } B_{s', s} = W_{s'}^* B W_s \text{ oder}$$

$$(B3) \quad (s, s') = \text{root}(\mathcal{T}_{s, s', \prec_B^T}) \in \mathcal{T}_{s, s', \prec_B^T}^- \text{ und } (B_{s, s'}^*)^* = W_{s'}^* B W_s.$$

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

Beweis. Mit $(b', b) \in \mathcal{L}_{\prec_{(A,B)}}^-$ folgt $b' \prec_{(A,B)} b$ und damit nach Definition $t' \prec_A t$ sowie $s' \prec_B s$. Wir betrachten zuerst die beiden Zeilencluster. Für die drei Fälle

$$\begin{aligned} & \text{level}(t') = \text{level}(t), \\ & \text{level}(t') < \text{level}(t) \text{ mit } t' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \\ & \text{und } \text{level}(t') > \text{level}(t) \text{ mit } t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \end{aligned}$$

folgt nach dem Charakterisierungslemma 4.2.22 $(t', t) \in \mathcal{T}_{\prec_A}^-$ und damit nach Lemma 4.3.40 $A_{t',t} = V_{t'}^* A V_t$, also die Aussage in (A1). Für den Fall $\text{level}(t') < \text{level}(t)$ mit $t' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ gilt nach Konstruktion des Assemblierungsbaums $\mathcal{T}_{t',t,\prec_A}$ insbesondere $(t', t) = \text{root}(\mathcal{T}_{t',t,\prec_A})$ sowie $(t', t) \in \mathcal{T}_{t',t,\prec_A}^-$ aufgrund von $t' \prec_A t$. Lemma 4.3.42 (a) liefert somit $A_{t',t} = V_{t'}^* A V_t$, also die Aussage in (A2). Aus $t' \prec_A t$ folgt $t \prec_A^T t'$, womit in dem verbleibenden Fall $\text{level}(t') > \text{level}(t)$ mit $t \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ nach Konstruktion $(t, t') = \text{root}(\mathcal{T}_{t,t',\prec_A^T}) \in \mathcal{T}_{t,t',\prec_A^T}^-$ gilt. Lemma 4.3.42 (b) liefert dann $(A_{t,t'}^*)^* = V_{t'}^* A V_t$, also die Aussage in (A3).

Betrachten wir die beiden Spaltencluster, dann folgt in den Fällen

$$\begin{aligned} & \text{level}(s') = \text{level}(s), \\ & \text{level}(s') < \text{level}(s) \text{ mit } s' \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}} \\ & \text{und } \text{level}(s') > \text{level}(s) \text{ mit } s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}} \end{aligned}$$

analog zur Diskussion für die Zeilencluster die Aussage $(s', s) \in \mathcal{T}_{\prec_B}^-$ sowie $B_{s',s} = W_{s'}^* B W_s$ und damit (B1). Ebenso lässt sich in dem Fall $\text{level}(s') < \text{level}(s)$ mit $s' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$ zeigen, dass $(s', s) = \text{root}(\mathcal{T}_{s',s,\prec_B}) \in \mathcal{T}_{s',s,\prec_B}^-$ sowie $B_{s',s} = W_{s'}^* B W_s$ gelten. Es folgt also (B2). Der verbleibende Fall $\text{level}(s') > \text{level}(s)$ mit $s \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$ führt dann wie bei der vorherigen Diskussion für t' und t auf $(s, s') = \text{root}(\mathcal{T}_{s,s',\prec_B^T}) \in \mathcal{T}_{s,s',\prec_B^T}^-$ sowie $(B_{s,s'}^*)^* = W_{s'}^* B W_s$ und damit (B3). \square

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, alle Koeffizientenmatrizen des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems konkret zu berechnen. Zu diesem Zweck muss für einen Clusterbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, eine geschachtelte Clusterbasis $(V, E)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ beschrieben werden, wie $V_p^* A V_q$ für zwei Cluster $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $p \prec_A q$ aufzustellen ist, wobei \prec_A hier wieder die Matrix-Galerkin-Clusterrelation bzgl. A in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ bezeichne. Die bisherige Diskussion hat gezeigt, dass wir hierzu lediglich die Interaktionsmatrizen aus den Definitionen 4.3.39 und 4.3.41 für Clustertupel aus der Teilmenge $\mathcal{T}_{\prec_A}^-$ des Relationsbaums \mathcal{T}_{\prec_A} bzw. in den benötigten Assemblierungsbaum aufstellen müssen. Da diese beiden Definitionen eine konkret implementierbare Vorschrift zur Berechnung besagter Matrizen bereitstellen, werden nun Algorithmen angegeben, die dies durchführen. Hierbei gehen wir modular vor, um die Abschätzung des Gesamtaufwands später schrittweise herleiten zu können. In Analogie zu den vorherigen Abschnitten wird bei der Formulierung der Algorithmen der Zugriff auf unzulässige Blöcke über unzulässige Blockzeilen verwendet. Wie sich die rekursive Beschreibung der Koeffizientenmatrizen (siehe Bemerkung 4.3.32) über diese Blockzeilen darstellt, fassen wir in der folgenden Bemerkung zusammen.

Bemerkung 4.3.46 (Darstellung über unzulässige Blockzeilen). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$, $(V, E)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ eine geschachtelte Clusterbasis, \prec_A die Matrix-Galerkin-Clusterrelation bzgl. A in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ sowie $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $p \prec_A q$.

Wir betrachten zuerst den Fall $(p, q) \in \mathcal{T}_{\prec_A}^-$, dann ergeben sich die folgenden Darstellungen der Interaktionsmatrix $A_{p,q}$ über die unzulässigen Blockzeilen.

Fall 1: Gelten $p \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, dann kann $A_{p,q} = V_p^* A V_q$ direkt berechnet werden.

Fall 2: Gelten $p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, dann folgt $\text{sons}((p, q)) = \text{sons}(p) \times \{q\}$ und damit

$$A_{p,q} = \sum_{(p^*, q^*) \in \text{sons}^-((p, q))} E_{p^*}^* A_{p^*, q^*} = \sum_{\substack{p^* \in \text{sons}(p) \text{ mit} \\ q \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\prec_A}, p^*)}} E_{p^*}^* A_{p^*, q}.$$

Fall 3: Gelten $p \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $q \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, dann folgt $\text{sons}((p, q)) = \{p\} \times \text{sons}(q)$ und damit

$$A_{p,q} = \sum_{(p^*, q^*) \in \text{sons}^-((p, q))} A_{p^*, q^*} E_{q^*} = \sum_{\substack{q^* \in \text{sons}(q) \text{ mit} \\ p \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\prec_A}, p^*)}} A_{p, q^*} E_{q^*}.$$

Fall 4: Gelten $p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $q \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, dann folgt $\text{sons}((p, q)) = \text{sons}(p) \times \text{sons}(q)$ und damit

$$A_{p,q} = \sum_{(p^*, q^*) \in \text{sons}^-((p, q))} E_{p^*}^* A_{p^*, q^*} E_{q^*} = \sum_{\substack{(p^*, q^*) \in \text{sons}(p) \times \text{sons}(q) \\ \text{mit } q^* \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\prec_A}, p^*)}} E_{p^*}^* A_{p^*, q^*} E_{q^*}.$$

Es gelte nun $\text{level}(p) < \text{level}(q)$ mit $p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, dann ergibt sich für alle $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\prec_A}^-$ mit $\text{sons}_A((p^*, q)) \neq \emptyset$ aufgrund von $\text{sons}_A((p^*, q)) = \text{sons}(p) \times \{q\}$ die Darstellung

$$A_{p^*, q} = \sum_{(p^{**}, q) \in \text{sons}_A^-((p^*, q))} E_{p^{**}}^* A_{p^{**}, q} = \sum_{\substack{p^{**} \in \text{sons}(p) \text{ mit} \\ q \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{p,q,\prec_A}, p^{**})}} E_{p^{**}}^* A_{p^{**}, q} \quad (4.59)$$

der Interaktionsmatrix über die unzulässige Blockzeile. Nach Lemma 4.3.42 (b) ist der Fall $\text{level}(p) > \text{level}(q)$ mit $q \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ ebenfalls über (4.59) abgedeckt.

Grundlage für das Assemblieren bilden nach Bemerkung 4.3.46 (und Bemerkung 4.3.32) die Matrizen $V_p^* A V_q$ für $(p, q) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ mit $p \prec_A q$. Nach Korollar 4.2.23 werden diese Tupel gerade durch die Menge $\mathcal{L}_{\prec_A}^-$ des Relationsbaums $\mathcal{T}_{\prec_A}^-$ beschrieben. Eine spezielle Darstellung dieser Matrizen stellt die Aussage des folgenden Korollars zur Verfügung, welche wir in der algorithmischen Umsetzung verwenden werden.

Korollar 4.3.47 (Interaktionsmatrizen für Blätter). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$, $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ eine Clusterbasis und \prec_A die Matrix-Galerkin-Clusterrelation bzgl. A in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, dann gilt für alle $(p, q) \in \mathcal{L}_{\prec_A}^-$

$$A_{p,q} = V_p^* A V_q = \sum_{(i,j) \in \hat{p} \times \hat{q}} a_{ij} (V_p^* e_i) (V_q^* e_j)^*, \quad (4.60)$$

wobei e_k für alle $k \in \mathcal{I}$ den k -ten Einheitsvektor in $\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ bezeichne.

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

Beweis. Sei $(p, q) \in \mathcal{L}_{\sim_A}^-$, dann gilt

$$\begin{aligned} A_{p,q} &= V_p^* A V_q = V_p^* \chi_p A \chi_q V_q = V_p^* \left(\sum_{i \in \hat{p}} e_i e_i^* \right) A \left(\sum_{j \in \hat{q}} e_j e_j^* \right) V_q \\ &= V_p^* \left(\sum_{(i,j) \in \hat{p} \times \hat{q}} e_i (e_i^* A e_j) e_j^* \right) V_q = V_p^* \left(\sum_{(i,j) \in \hat{p} \times \hat{q}} a_{ij} e_i e_j^* \right) V_q \\ &= \sum_{(i,j) \in \hat{p} \times \hat{q}} (V_p^* e_i) a_{ij} (e_j^* V_q) = \sum_{(i,j) \in \hat{p} \times \hat{q}} a_{ij} (V_p^* e_i) (V_q^* e_j)^*, \end{aligned}$$

also die zu beweisende Aussage. \square

Für die Berechnung einer Interaktionsmatrix aus Korollar 4.3.47 ist es unerheblich, in welcher Reihenfolge die Terme auf der rechten Seite von (4.60) aufsummiert werden. Aus diesem Grund berechnet Algorithmus 4.3.10 alle Interaktionsmatrizen in $\mathcal{L}_{\sim_A}^-$. Die Grundstruktur entspricht hier der des Algorithmus 4.3.9 für das Aufstellen der Menge $\mathcal{L}_{\sim_A}^-$, womit eine explizite Schleife über $\mathcal{L}_{\sim_A}^-$ entfällt. Diese ist implizit durch die beiden geschachtelten Schleifen über alle Nicht-Null-Einträge der Matrix gegeben. Da die Struktur von Algorithmus 4.3.10 der von Algorithmus 4.3.9 entspricht, ließen sich diese beiden zu einem einzigen zusammenfassen. Dieser würde dann die Menge $\mathcal{L}_{\sim_A}^-$ und alle Interaktionsmatrizen hierfür simultan berechnen. Die getrennte Formulierung ist der gesonderten theoretischen Betrachtung des Aufstellens und Assemblierens des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems geschuldet.

Es folgen nun die Definitionen von Algorithmen, mit denen sich alle in obiger Bemerkung 4.3.46 beschriebenen Fälle behandeln lassen, bei denen Transfermatrizen benötigt werden. In Algorithmus 4.3.11 wird nur die Transfermatrix des Zeilenclusters, in Algorithmus 4.3.12 nur die des Spaltenclusters und in Algorithmus 4.3.13 werden die Transfermatrizen beider Cluster verwendet. Da der Algorithmus 4.3.11 zum Assemblieren in Matrix-Galerkin-Clusterrelationsbäumen und in Assemblierungsbäumen Verwendung finden wird, lassen wir bei allen drei Algorithmen in der Bezeichnung der unzulässigen Blockzeile die Angabe des Blockbaums weg. Dieser ergibt sich dann aus dem jeweiligen Algorithmus, aus dem die entsprechende Funktion aufgerufen wird.

Nach dem Aufruf von Algorithmus 4.3.10 sind die grundlegenden Informationen zum Aufstellen aller Interaktionsmatrizen in $\mathcal{T}_{\sim_A}^-$ vorhanden. Wir sind nun also in der Lage, hierfür einen Algorithmus anzugeben. Da alle Interaktionsmatrizen für Nicht-Blatt-Blöcke über die jeweiligen unzulässigen Söhne im Matrix-Galerkin-Clusterrelationsbaum definiert sind, müssen Interaktionsmatrizen auf höheren Leveln vor selbigen auf niedrigeren Leveln berechnet werden. Dies bedeutet, dass wir $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ von unten (hoher Level) nach oben (niedriger Level) und für alle $p \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ die Menge $\text{row}^-(\mathcal{T}_{\sim_A}, p)$ auch levelweise von Clustern mit hohem zu Clustern mit niedrigem Level durchlaufen müssen. Algorithmus 4.3.14 bildet diese Vorgehensweise ab und berechnet so alle Interaktionsmatrizen in $\mathcal{T}_{\sim_A}^-$. Die dortige Schleife über die Tiefe des Clusterbaums ist der in dieser Arbeit verwendeten Darstellung von Relationsbäumen über Blockzeilen geschuldet.

Algorithmus 4.3.10 Berechnung aller Interaktionsmatrizen $A_{p,q}$ für $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $(p, q) \in \mathcal{L}_{\succ_A}^-$.

```

procedure ASSEMBLE_INTERACTION_LEAF( $A, \mathcal{I}, \text{idx2leaf}_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ )
  for all  $i \in \mathcal{I}$  do
     $p \leftarrow \text{idx2leaf}_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}[i]$ 
    for all  $j \in \text{row}(A, i)$  do
       $q \leftarrow \text{idx2leaf}_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}[j]$ 
       $A_{p,q} \leftarrow A_{p,q} + a_{ij}(V_p^* e_i)(V_q^* e_j)^*$ 
    end for
  end for
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Zu Beginn des Algorithmus gilt $A_{p,q} = 0$ für alle $(p, q) \in \mathcal{L}_{\succ_A}^-$. Die Interaktionsmatrizen werden dann über die Darstellung (4.60) aufgestellt. Es werden solange Updates dieser Matrizen berechnet, bis für alle $(p, q) \in \mathcal{L}_{\succ_A}^-$ alle $(i, j) \in \hat{p} \times \hat{q}$ durchlaufen wurden.

Das Array $\text{idx2leaf}_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ ordnet wie in Algorithmus 4.3.9 jedem Index $i \in \mathcal{I}$ über $\text{idx2leaf}_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}[i] \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ das eindeutige Element $p \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ mit $i \in \hat{p}$ zu.

Algorithmus 4.3.11 Assemblieren der Interaktionsmatrix $A_{p,q}$ für $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $p \succ_A q$ unter Zuhilfenahme von Transfermatrizen der Söhne des Zeilenclusters p .

```

procedure ASSEMBLE_INTERACTION_TRANSFER_ROW( $p, q, A_{p,q}$ )
  for all  $p^* \in \text{sons}(p)$  do
    if  $q \in \text{row}^-(p^*)$  then
       $A_{p,q} \leftarrow A_{p,q} + E_{p^*}^* A_{p^*,q}$ 
    end if
  end for
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Dieser Algorithmus berechnet die Interaktionsmatrix $A_{p,q}$ zweier Cluster $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ über die unzulässigen Söhne für den Fall, dass nur die Transfermatrizen für den Zeilencluster benötigt werden. Zu Beginn gilt $A_{p,q} = 0$.

Nach Bemerkung 4.3.46 wird dieser Algorithmus verwendet, falls (p, q) ein unzulässiger Block in \mathcal{T}_{\succ_A} oder in einem Assemblierungsbaum ist. Es ist dann $(p^*, q^*) \in \text{sons}^-((p, q))$ oder $(p^*, q) \in \text{sons}_{\mathcal{A}}^-((p, q))$ gleichbedeutend mit $q^* = q$ sowie

$$p^* \in \text{sons}(p) \quad \text{und} \quad q \in \text{row}^-(p^*).$$

Algorithmus 4.3.12 Assemblieren der Interaktionsmatrix $A_{p,q}$ für $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $p \succ_A q$ unter Zuhilfenahme von Transfermatrizen der Söhne des Spaltenclusters q .

```

procedure ASSEMBLE_INTERACTION_TRANSFER_COL( $p, q, A_{p,q}$ )
  for all  $q^* \in \text{sons}(q)$  do
    if  $q^* \in \text{row}^-(p)$  then
       $A_{p,q} \leftarrow A_{p,q} + A_{p,q^*} E_{q^*}$ 
    end if
  end for
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Dieser Algorithmus berechnet die Interaktionsmatrix $A_{p,q}$ zweier Cluster $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ über die unzulässigen Söhne für den Fall, dass nur die Transfermatrizen für den Spaltencluster benötigt werden. Zu Beginn gilt $A_{p,q} = 0$.

Nach Bemerkung 4.3.46 wird dieser Algorithmus verwendet, falls (p, q) ein unzulässiger Block in \mathcal{T}_{\prec_A} ist. Es ist dann $(p^*, q^*) \in \text{sons}^-(p, q)$ gleichbedeutend mit $p^* = p$ sowie

$$q^* \in \text{sons}(q) \quad \text{und} \quad q^* \in \text{row}^-(p).$$

Algorithmus 4.3.13 Assemblieren der Interaktionsmatrix $A_{p,q}$ für $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $p \succ_A q$ unter Zuhilfenahme von Transfermatrizen der Söhne beider Cluster p und q .

```

procedure ASSEMBLE_INTERACTION_TRANSFER_ROW_COL( $p, q, A_{p,q}$ )
  for all  $p^* \in \text{sons}(p)$  do
    for all  $q^* \in \text{sons}(q)$  do
      if  $q^* \in \text{row}^-(p^*)$  then
         $A_{p,q} \leftarrow A_{p,q} + E_{p^*} A_{p^*,q^*} E_{q^*}$ 
      end if
    end for
  end for
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Dieser Algorithmus berechnet die Interaktionsmatrix $A_{p,q}$ zweier Cluster $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ über die unzulässigen Söhne für den Fall, dass die Transfermatrizen des Zeilen- und Spaltenclusters benötigt werden. Zu Beginn gilt $A_{p,q} = 0$.

Nach Bemerkung 4.3.46 wird dieser Algorithmus verwendet, falls (p, q) ein unzulässiger Block in \mathcal{T}_{\prec_A} ist. Es ist dann $(p^*, q^*) \in \text{sons}^-(p, q)$ gleichbedeutend mit

$$(p^*, q^*) \in \text{sons}(p) \times \text{sons}(q) \quad \text{und} \quad q^* \in \text{row}^-(p^*).$$

Um sicherzustellen, dass alle benötigten Informationen für die Berechnung der aktuell betrachteten Interaktionsmatrix zur Verfügung stehen, wurde in Algorithmus 4.3.14 eine rekursive Variante verwendet. Man hätte hier allerdings auch einen levelweisen Ansatz verfolgen können, um so von den Söhnen zu den Vätern überzugehen.

Die unzulässigen Blätter in Assemblierungsbäumen sind — genau wie bei Matrix-Galerkin-Clusterrelationsbäumen — die Grundlage des Assemblierens. Da diese nach Definition 4.3.41 allerdings durch die Menge $\mathcal{T}_{\prec_A}^-$ gegeben sind (vgl. Korollar 4.3.38), bedarf es hier keiner gesonderten Untersuchung bzw. eines speziellen Algorithmus, der diese Matrizen aufstellt. Solange alle Interaktionsmatrizen in $\mathcal{T}_{\prec_A}^-$ mit Algorithmus 4.3.14 vor dem Assemblieren selbiger in Assemblierungsbäumen berechnet wurden, sind alle nötigen Informationen zu diesem Zeitpunkt vorhanden. Der Algorithmus 4.3.15 berechnet alle Interaktionsmatrizen in einem Assemblierungsbaum.

Bemerkung 4.3.48 (Söhne in Assemblierungsbäumen). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und \prec_A die Matrix-Galerkin-Clusterrelation bzgl. A in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$. Für $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $\text{level}(p) < \text{level}(q)$ und $p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ sowie $p \prec_A q$ ist der Zeilenclusterbaum des Assemblierungsbaums $\mathcal{T}_{p,q,\prec_A}$ durch den Abschnittsbaum $\mathcal{T}_{p,q}$ gegeben. Da $\mathcal{T}_{p,q}$ einen Abschnitt von $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ beschreibt, bietet es sich nicht an, diesen Clusterbaum separat aufzustellen. Insbesondere, da wir potentiell nicht nur einen, sondern mehrere Assemblierungsbäume zu betrachten haben. In Algorithmus 4.3.15 müssen wir allerdings entscheiden, ob ein Cluster $p^* \in \mathcal{T}_{p,q}$ noch Söhne hat oder nicht, ob also $\text{sons}^*(p^*) \neq \emptyset$ gilt. Nach Definition 4.3.34 lässt sich dies durch die Söhne in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ bzw. den Level von q ermitteln. Es ist dann $\text{sons}^*(p^*) \neq \emptyset$ äquivalent zu*

$$\text{sons}(p^*) \neq \emptyset \quad \text{und} \quad \text{level}(p^*) \neq \text{level}(q).$$

Es liegen nun alle Hilfsmittel vor, um einen Algorithmus anzugeben, der für einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ sowie der zugehörigen Matrix-Galerkin-Blockrelation $\prec_{(A,B)}$ das durch $\mathcal{L}_{\prec_{(A,B)}}^-$ gegebene Matrix-Galerkin-Gleichungssystem komplett assembliert. Unter Verwendung der vorher diskutierten Teilschritte, berechnet Algorithmus 4.3.16 alle Koeffizientenmatrix des gewünschten Systems.

Algorithmus 4.3.14 Assemblieren aller Interaktionsmatrizen $A_{p,q}$ für $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $(p, q) \in \mathcal{T}_{\prec_A}^-$ unter Zuhilfenahme der Algorithmen 4.3.11, 4.3.12 und 4.3.13.

```

procedure ASSEMBLE_INTERACTION_RELATIONTREE( $p$ )
  for all  $p^* \in \text{sons}(p)$  do
    ASSEMBLE_INTERACTION_RELATIONTREE( $p^*$ )
  end for
  for  $\ell = \text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})$  downto 0 do
    for all  $q \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\prec_A}, p)$  with  $\text{level}(q) = \ell$  do
      if  $\text{sons}(p) \neq \emptyset$  and  $\text{sons}(q) = \emptyset$  then
        ASSEMBLE_INTERACTION_TRANSFER_ROW( $p, q, A_{p,q}$ )
        ▷ Algorithmus 4.3.11
      else if  $\text{sons}(p) = \emptyset$  and  $\text{sons}(q) \neq \emptyset$  then
        ASSEMBLE_INTERACTION_TRANSFER_COL( $p, q, A_{p,q}$ )
        ▷ Algorithmus 4.3.12
      else if  $\text{sons}(p) \neq \emptyset$  and  $\text{sons}(q) \neq \emptyset$  then
        ASSEMBLE_INTERACTION_TRANSFER_ROW_COL( $p, q, A_{p,q}$ )
        ▷ Algorithmus 4.3.13
      end if
    end for
  end for
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Der initiale Aufruf dieses Algorithmus geschieht mit der Wurzel $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$. Zu Beginn gilt $A_{p,q} = 0$ für alle $(p, q) \in \mathcal{T}_{\prec_A}^-$. Die Funktion ASSEMBLE_INTERACTION_RELATIONTREE wird zuerst solange rekursiv aufgerufen, bis der entsprechende Cluster keine Söhne mehr hat. Anschließend wird levelweise von Clustern mit hohem zu Clustern mit niedrigem Level über die unzulässige Blockzeile gelaufen. Anhand der Fälle aus Definition 4.3.39 der Interaktionsmatrizen wird dann entschieden, welcher Fall vorliegt, wobei die Situation $p, q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ ignoriert wird. Dieser Fall muss vorher durch Algorithmus 4.3.10 behandelt worden sein. Je nach vorliegendem Fall werden die Algorithmen 4.3.11, 4.3.12 oder 4.3.13 aufgerufen, in denen das Assemblieren über die entsprechenden Transfermatrizen durchgeführt wird. Nach Rückkehr aus der Rekursion sind alle Informationen verfügbar, um die Interaktionsmatrizen für alle Blöcke der unzulässigen Blockzeile des Vaters auf gleiche Weise zu berechnen.

Algorithmus 4.3.15 Assemblieren aller Interaktionsmatrizen $A_{p^*,q}$ für $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\prec_A}^-$ mit $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, $\text{level}(p) < \text{level}(q)$, $p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $p \prec_A q$ unter Zuhilfenahme des Algorithmus 4.3.11.

```

procedure ASSEMBLE_INTERACTION_ASSEMBLETREE( $A, p^*$ )
  for all  $p^{**} \in \text{sons}^*(p^*)$  do
    ASSEMBLE_INTERACTION_ASSEMBLETREE( $A, p^{**}$ )
  end for
  if  $q \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{p,q,\prec_A}, p^*)$  and  $\text{sons}^*(p^*) \neq \emptyset$  then
    ASSEMBLE_INTERACTION_TRANSFER_ROW( $p^*, q, A_{p^*,q}$ )
    ▷ Algorithmus 4.3.11
  end if
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Der initiale Aufruf geschieht mit $p = \text{root}(\mathcal{T}_{p,q}) \in \mathcal{T}_{p,q}$, also der Wurzel des Abschnittsbaums $\mathcal{T}_{p,q}$. Die Matrix A wird als Parameter mit übergeben, um kenntlich zu machen, ob die Interaktionsmatrizen in den Blättern transponiert zu betrachten sind oder nicht (vgl. Bemerkung 4.3.43). Zu Beginn gilt $A_{p^*,q} = 0$ für alle $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\prec_A}^-$.

Die Funktion ASSEMBLE_INTERACTION_ASSEMBLETREE wird solange rekursiv aufgerufen, bis der entsprechende Cluster keine Söhne mehr in $\mathcal{T}_{p,q,\prec_A}$ hat. Da der Spaltenclusterbaum der konstante Clusterbaum $\bar{\mathcal{T}}_q = \{q\}$ ist, wird nur abgefragt, ob dieser Cluster sich in der unzulässigen Blockzeile des aktuell betrachteten Zeilenclusters befindet. Ist dies der Fall, wird Algorithmus 4.3.11 aufgerufen (vgl. Definition 4.3.41). Unzulässige Blätter aus $\mathcal{T}_{p,q,\prec_A}$ werden ignoriert, da sich diese in $\mathcal{T}_{\prec_A}^-$ befinden (vgl. Korollar 4.3.38) und die entsprechenden Interaktionsmatrizen somit durch Algorithmus 4.3.14 bereits vorher berechnet wurden.

Nach der Rückkehr aus der Rekursion sind alle Informationen vorhanden, um die Interaktionsmatrizen für alle Blöcke der unzulässigen Blockzeile des Vaters auf gleiche Weise zu berechnen.

Algorithmus 4.3.16 Assemblieren aller Koeffizientenmatrizen des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems $\mathcal{L}_{\prec_{(A,B)}}^-$ für einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ sowie der zugehörigen Matrix-Galerkin-Blockrelation $\prec_{(A,B)}$ mit zugrundeliegenden Matrix-Galerkin-Clusterrelationen \prec_A und \prec_B .

```

procedure ASSEMBLE_INTERACTION_MATRIXGALERKIN( $\mathcal{L}_{\prec_{(A,B)}}^-$ )
  ASSEMBLE_INTERACTION_LEAF( $A, \mathcal{I}, \text{idx2leaf}_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ )      ▷ Algorithmus 4.3.10
  ASSEMBLE_INTERACTION_LEAF( $B, \mathcal{J}, \text{idx2leaf}_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ )      ▷ Algorithmus 4.3.10
  ASSEMBLE_INTERACTION_RELATIONTREE( $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})$ )        ▷ Algorithmus 4.3.14
  ASSEMBLE_INTERACTION_RELATIONTREE( $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}})$ )        ▷ Algorithmus 4.3.14
  for all  $b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$  and  $b = (t, s) \in \text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}, b')$  do
    if  $\text{level}(t') < \text{level}(t)$  and  $t' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$  then
      ASSEMBLE_INTERACTION_ASSEMBLETREE( $A, t'$ )          ▷ Algorithmus 4.3.15
    else if  $\text{level}(t') > \text{level}(t)$  and  $t \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$  then
      ASSEMBLE_INTERACTION_ASSEMBLETREE( $A^*, t$ )          ▷ Algorithmus 4.3.15
    end if
    if  $\text{level}(s') < \text{level}(s)$  and  $s' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$  then
      ASSEMBLE_INTERACTION_ASSEMBLETREE( $B, s'$ )          ▷ Algorithmus 4.3.15
    else if  $\text{level}(s') > \text{level}(s)$  and  $s \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$  then
      ASSEMBLE_INTERACTION_ASSEMBLETREE( $B^*, s$ )          ▷ Algorithmus 4.3.15
    end if
  end for
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Der einzige Übergabeparameter $\mathcal{L}_{\prec_{(A,B)}}^-$ der Funktion ASSEMBLE_INTERACTION_MATRIXGALERKIN charakterisiert das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem und steht hier stellvertretend für alle zum Assemblieren dieses Systems nötigen Informationen. Zu Beginn seien alle Interaktionsmatrizen gleich null.

Zuerst wird mit der Funktion ASSEMBLE_INTERACTION_LEAF die Grundlage zum Assemblieren aller Interaktionsmatrizen in den Teilmengen $\mathcal{T}_{\prec_A}^-$ und $\mathcal{T}_{\prec_B}^-$ der entsprechenden Matrix-Galerkin-Clusterrelationsbäume gelegt. Anschließend werden eben diese Matrizen über die Funktion ASSEMBLE_INTERACTION_RELATIONTREE berechnet. Abschließend dienen die Aufrufe der Funktion ASSEMBLE_INTERACTION_ASSEMBLETREE dazu, alle Interaktionsmatrizen in möglichen Sonderfällen — also alle Interaktionsmatrizen in benötigten Assemblierungsbäumen — aufzustellen.

Aufwand

Uns stehen nun alle Algorithmen zur Verfügung, um für einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ sowie $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ das zu der Matrix-Galerkin-Blockrelation $\asymp_{(A,B)}$ gehörende und durch $\mathcal{L}_{\asymp_{(A,B)}}^-$ gegebene Matrix-Galerkin-Gleichungssystem komplett zu assemblieren. Es seien $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $(W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ zwei geschachtelte Clusterbasen mit den Rangverteilungen $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ bzw. $L_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ (vgl. Definition 3.3.7). Für alle Blöcke $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $(b', b) \in \mathcal{L}_{\asymp_{(A,B)}}^-$ sind dann

$$V_{t'}^* A V_t \in \mathbb{R}^{K_{t'} \times K_t} \quad \text{und} \quad W_{s'}^* B W_s \in \mathbb{R}^{L_{s'} \times L_s}$$

zu berechnen. Wie vorher beschrieben, müssen hierzu die Interaktionsmatrizen in den Teilmengen $\mathcal{T}_{\asymp_A}^-$ und $\mathcal{T}_{\asymp_B}^-$ — \asymp_A und \asymp_B bezeichnen hier wieder die $\asymp_{(A,B)}$ zugrundeliegenden Matrix-Galerkin-Clusterrelationen — sowie in allen benötigten Assemblierungsbäumen aufgestellt werden. Diese Assemblierungsbäume treten sowohl für Cluster des Zeilenclusterbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ als auch für Cluster des Spaltenclusterbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ auf.

Wir werden nun den Aufwand aller in diesem Abschnitt definierten Algorithmen unter geeigneten Voraussetzungen abschätzen, um daraus eine obere Schranke des Gesamtaufwands für das Assemblieren des kompletten Matrix-Galerkin-Gleichungssystems herzuleiten. Da hier im Gegensatz zu Abschnitt 4.3.2 in allen Algorithmen arithmetische Operationen — Additionen und Multiplikationen — anfallen, wird die maximale Anzahl dieser Operationen im weiteren Verlauf als Aufwand des jeweiligen Algorithmus angesehen (vgl. Bemerkung 2.1.10).

Als erstes befassen wir uns mit einer Schranke für den Aufwand von Algorithmus 4.3.10, der das Aufstellen aller zu unzulässigen Blättern des Relationsbaums \mathcal{T}_{\asymp_A} gehörenden Interaktionsmatrizen abbildet.

Lemma 4.3.49 (Aufwand von Algorithmus 4.3.10). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ eine Clusterbasis mit Rangverteilungen $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ eine $C_{\text{sp},A}$ -schwachbesetzte Matrix, dann benötigt Algorithmus 4.3.10 mit $k_{\max} := \max_{p \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} \#K_p$ nicht mehr als*

$$3C_{\text{sp},A} k_{\max}^2 \# \mathcal{I}$$

arithmetische Operationen.

Beweis. Seien $i \in \mathcal{I}$ und $j \in \text{row}(A, i)$ sowie $p, q \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ mit $i \in \hat{p}$ und $j \in \hat{q}$. Es bezeichne e_i den i -ten und e_j den j -ten Einheitsvektor in $\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$. Wir gehen davon aus, dass die Matrix-Vektor-Multiplikationen $V_p^* e_i$ und $V_q^* e_j$ nicht explizit ausgeführt werden, sondern die Ergebnisse dieser durch Auslesen der i -ten Zeile von V_p und der j -ten Zeile von V_q ermittelt werden. Die Berechnung von $(V_p^* e_i)(V_q^* e_j)^* \in \mathbb{R}^{K_p \times K_q}$ benötigt dann pro Eintrag genau eine Multiplikation und somit insgesamt nicht mehr als $\#K_p \#K_q \leq k_{\max}^2$ arithmetische Operationen. Ebenso benötigt die Skalierung dieser Matrix mit a_{ij} nicht mehr als k_{\max}^2 Operationen. Würde man erst $(V_p^* e_i)$ oder $(V_q^* e_j)^*$ mit a_{ij} skalieren, dann wären für diesen Schritt sogar nur k_{\max} Operationen notwendig. Da $k_{\max} \leq k_{\max}^2$ gilt, verzichten wir hier allerdings auf diese Unterscheidung. Schließlich erfordert die Aktualisierung der Interaktionsmatrix $A_{p,q}$ die Addition zweier $(K_p \times K_q)$ -Matrizen, was auch wieder einen Aufwand von maximal k_{\max}^2 bedeutet.

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

Die Gesamtanzahl arithmetischer Operationen lässt sich also gegen

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{j \in \text{row}(A, i)} 3k_{\max}^2 \leq \sum_{i \in \mathcal{I}} 3C_{\text{sp}, A} k_{\max}^2 \leq 3C_{\text{sp}, A} k_{\max}^2 \# \mathcal{I}$$

abschätzen. \square

Die Grundlage für das Assemblieren in Matrix-Galerkin-Clusterrelations- bzw. Assemblierungsbäumen bilden die Algorithmen 4.3.11, 4.3.12 und 4.3.13. Den Aufwand für diese drei fundamentalen Algorithmen schätzen wir in dem nachstehenden Lemma ab.

Lemma 4.3.50 (Aufwand von Algorithmus 4.3.11, 4.3.12 und 4.3.13). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ eine geschachtelte Clusterbasis und $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$. Mit $k_{\max} := \max_{p \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} \#K_p$ und $C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} := \max_{p \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} \# \text{sons}(p)$ ist die maximale Anzahl an arithmetischen Operationen*

- (a) für die Algorithmen 4.3.11 und 4.3.12 durch $3C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} k_{\max}^3$ und
- (b) für den Algorithmus 4.3.13 durch $5C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}^2 k_{\max}^3$ beschränkt.

Beweis. (a) Wir betrachten zuerst Algorithmus 4.3.11 und es gelte $p \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$. Für alle $p^* \in \text{sons}(p)$ erfordert die Multiplikation von $E_{p^*}^* \in \mathbb{R}^{K_p \times K_{p^*}}$ mit $A_{p^*, q} \in \mathbb{R}^{K_{p^*} \times K_q}$ nicht mehr als $2\#K_p \#K_{p^*} \#K_q \leq 2k_{\max}^3$ und die Addition von $A_{p, q}$ mit $E_{p^*}^* A_{p^*, q}$ nicht mehr als $\#K_p \#K_q \leq k_{\max}^2 \leq k_{\max}^3$ arithmetische Operationen. Der Gesamtaufwand von Algorithmus 4.3.11 lässt sich also durch

$$\sum_{p^* \in \text{sons}(p)} 3k_{\max}^3 \leq 3C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} k_{\max}^3$$

beschränken. Mit analogen Argumenten für $q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und alle $q^* \in \text{sons}(q)$ ist der Aufwand von Algorithmus 4.3.12 ebenfalls durch

$$\sum_{q^* \in \text{sons}(q)} 3k_{\max}^3 \leq 3C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} k_{\max}^3$$

beschränkt.

(b) Es gelte nun $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$. Da in Algorithmus 4.3.13 Schleifen über die Söhne beider Cluster auftreten und für jedes dieser Paare von Söhnen im Vergleich zu der Diskussion in Teil (a) dieses Lemmas eine zusätzliche Multiplikation zweier Matrizen hinzukommt, die maximal $2k_{\max}^3$ arithmetische Operationen erfordert, lässt sich der Aufwand dort durch

$$\sum_{p^* \in \text{sons}(p)} \sum_{q^* \in \text{sons}(q)} 5k_{\max}^3 \leq \sum_{p^* \in \text{sons}(p)} 5C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} k_{\max}^3 \leq 5C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}^2 k_{\max}^3$$

nach oben abschätzen. \square

Unter Verwendung des vorherigen Lemmas werden wir nun eine obere Schranke des Aufwands von Algorithmus 4.3.14, also dem Assemblieren aller Interaktionsmatrizen in einem Matrix-Galerkin-Clusterrelationsbaum herleiten.

Lemma 4.3.51 (Aufwand von Algorithmus 4.3.14). *Seien ein Clusterbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, eine geschachtelte Clusterbasis $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ gegeben. Sei weiter \prec_A die Matrix-Galerkin-Clusterrelation bzgl. A in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ sowie der zugehörige Relationsbaum \mathcal{T}_{\prec_A} . $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_A}}$ -schwachbesetzt, dann benötigt Algorithmus 4.3.14 mit $k_{\max} := \max_{p \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} \#K_p$ und $C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} := \max_{p \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} \# \text{sons}(p)$ nicht mehr als*

$$5C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}^2 C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_A}} k_{\max}^3 \# \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$$

arithmetische Operationen.

Beweis. Für $p \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $q \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\prec_A}, p)$ fallen nach Lemma 4.3.50 zur Berechnung der Interaktionsmatrix des Blocks (p, q) nicht mehr als

$$5C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}^2 k_{\max}^3$$

arithmetische Operationen an — da potentiell der Algorithmus 4.3.13 aufgerufen wird und $3C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} k_{\max}^3 \leq 5C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}^2 k_{\max}^3$ gilt, verwenden wir diese Schranke für den Aufwand pro Block. Es gilt

$$\text{row}^-(\mathcal{T}_{\prec_A}, p) \subseteq \text{row}(\mathcal{T}_{\prec_A}, p)$$

für alle $p \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, womit sich der Aufwand von Algorithmus 4.3.14 durch

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} \sum_{q \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\prec_A}, p)} 5C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}^2 k_{\max}^3 &\leq \sum_{p \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} 5C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}^2 C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_A}} k_{\max}^3 \\ &\leq 5C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}^2 C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_A}} k_{\max}^3 \# \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \end{aligned}$$

abschätzen lässt. \square

Als letzten Teilschritt bleibt der Aufwand von Algorithmus 4.3.15 zu untersuchen. Dieser Algorithmus wird verwendet, um die für das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem benötigten Interaktionsmatrizen, die durch die Wurzel eines Assemblierungsbaums definiert werden zu berechnen.

Die Assemblierungsbäume, die tatsächlich betrachtet werden müssen, hängen von der Beschaffenheit der Elemente aus $\mathcal{L}_{\prec(A, B)}^-$ ab. Nach vorheriger Diskussion benötigen wir für zwei Blöcke $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $(b', b) \in \mathcal{L}_{\prec(A, B)}^-$ einen Assemblierungsbaum zum Aufstellen der Interaktionsmatrizen $V_{t'}^* A V_t$ bzw. $W_{s'}^* B W_s$, wenn für die Zeilencluster

$$\begin{aligned} &\text{level}(t') < \text{level}(t) \quad \text{mit} \quad t' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \\ \text{oder} \quad &\text{level}(t') > \text{level}(t) \quad \text{mit} \quad t \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \end{aligned} \tag{4.61}$$

bzw. für die Spaltencluster

$$\begin{aligned} &\text{level}(s') < \text{level}(s) \quad \text{mit} \quad s' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}} \\ \text{oder} \quad &\text{level}(s') > \text{level}(s) \quad \text{mit} \quad s \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}} \end{aligned} \tag{4.62}$$

gilt.

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

Für die ersten Fälle in (4.61) und (4.62) sind — wie eingangs dieses Abschnitts motiviert — die Assemblierungsbäume $\mathcal{T}_{t',t,\asymp_A}$ sowie $\mathcal{T}_{s',s,\asymp_B}$ und in den zweiten Fällen von (4.61) und (4.62) die Assemblierungsbäume $\mathcal{T}_{t,t',\asymp_A^T}$ sowie $\mathcal{T}_{s,s',\asymp_B^T}$ zu betrachten.

Wir werden nun zuerst die Mächtigkeiten dieser Assemblierungsbäume abschätzen, um damit den Aufwand für das Assemblieren aller Interaktionsmatrizen in einem solchen Baum zu beschränken. Aufgrund der Unabhängigkeit des folgenden Lemmas von konkreten Matrix-Galerkin-Clusterrelationen wird die dortige Aussage mit zwei beliebigen vererbbaaren Clusterrelationen formuliert und bewiesen. Die Aussagen lassen sich dann auf den Spezialfall von Matrix-Galerkin-Clusterrelationen übertragen — vgl. Korollar 4.2.17 für den Nachweis der Vererbbarkeit einer Matrix-Galerkin-Clusterrelation.

Lemma 4.3.52 (Schwachbesetztheit). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ und $\tau_{\mathcal{J}} \sim$ zwei vererbbaare Clusterrelationen sowie \sim die zugehörige Blockrelation. Seien weiter $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $(b', b) \in \mathcal{L}_{\sim}^-$ und $(p, q, \mathcal{K}) \in \{(t', t, \mathcal{I}), (s', s, \mathcal{J})\}$, dann gelten mit $C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}} := \max_{r \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}}} \# \text{sons}(r) \geq 2$ die Abschätzungen*

$$(a) \# \mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{K}}} \sim \leq 2C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}}^{C_{L_1, \tau_{\mathcal{K}}} + 1}, \text{ falls } \text{level}(p) < \text{level}(q) \text{ mit } p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{K}} \text{ und}$$

$$(b) \# \mathcal{T}_{q,p,\mathcal{T}_{\mathcal{K}}} \sim^T \leq 2C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}}^{C_{L_2, \tau_{\mathcal{K}}} + 1}, \text{ falls } \text{level}(p) > \text{level}(q) \text{ mit } q \notin \mathcal{L}_{\mathcal{K}}.$$

Beweis. (a) Es gelte $\text{level}(p) < \text{level}(q)$ mit $p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{K}}$. In Analogie zu dem Beweis von Lemma 4.3.19 definieren wir für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ die Mengen

$$\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{K}}}^{(\ell)} \sim := \{(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{K}}} \sim \mid \text{level}(p^*) - \text{level}(p) = \ell\},$$

zeigen

$$\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{K}}} \sim \subseteq \bigcup_{\ell=0}^{C_{L_1, \tau_{\mathcal{K}}} + 1} \mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{K}}}^{(\ell)} \sim \quad (4.63)$$

und schätzen die Mächtigkeiten von $\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{K}}}^{(\ell)} \sim$ für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ ab, um so eine obere Schranke für $\# \mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{K}}} \sim$ zu erhalten.

Vorbereitend zeigen wir, dass für die Cluster der Wurzel $(p, q) = \text{root}(\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{K}}} \sim)$

$$0 < \text{level}(q) - \text{level}(p) \leq C_{L_1, \tau_{\mathcal{K}}} + 1$$

gilt. Die erste Ungleichung folgt hierbei direkt aus der Voraussetzung. Es bleibt also nur die zweite Ungleichung zu zeigen. Mit $p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ folgt nach Kontraposition aus Lemma 3.2.6

$$\text{level}(b') \stackrel{3.2.6}{\leq} \text{level}(p) < \text{level}(q) \leq \text{level}(b) \quad (4.64)$$

und damit wieder nach Lemma 3.2.6 $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Des Weiteren gilt wegen (4.64) und $(b', b) \in \mathcal{L}_{\sim}^- \subseteq \mathcal{T}_{\sim}$

$$b \in \text{row}^>(\mathcal{T}_{\sim}, b'),$$

also nach Lemma 3.4.11

$$b \in \bigcup_{b^{++} \in \text{row}^=(\mathcal{T}_\sim, b')} \bigcup_{b^+ \in U_1(\mathcal{T}_\sim, (b', b^{++}))} \text{sons}(b^+).$$

Es existieren somit $b^{++} \in \text{row}^=(\mathcal{T}_\sim, b')$ und $b^+ \in U_1(\mathcal{T}_\sim, (b', b^{++}))$ mit $b \in \text{sons}(b^+)$. Unter Verwendung von $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ folgt nach Definition 3.4.18

$$\begin{aligned} \text{level}(b^+) - \text{level}(b') &\leq \max_{b^* \in U_1(\mathcal{T}_\sim, (b', b^{++}))} \text{level}(b^*) - \text{level}(b') \stackrel{3.4.18}{=} L_1(\mathcal{T}_\sim, (b', b^{++})) \\ &\leq \max_{\substack{\tilde{b}' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \\ \tilde{b} \in \text{row}^=(\mathcal{T}_\sim, \tilde{b}')}} L_1(\mathcal{T}_\sim, (\tilde{b}', \tilde{b})) \stackrel{3.4.18}{=} C_{L_1, \mathcal{T}_\sim} \end{aligned}$$

und mit $b \in \text{sons}(b^+)$ auch

$$\text{level}(b) - \text{level}(b') = \text{level}(b^+) + 1 - \text{level}(b') \leq C_{L_1, \mathcal{T}_\sim} + 1.$$

Da $\text{level}(b') = \text{level}(p)$ sowie $\text{level}(q) \leq \text{level}(b)$ gilt (siehe (4.64)), folgt

$$0 < \text{level}(q) - \text{level}(p) \leq \text{level}(b) - \text{level}(b') \leq C_{L_1, \mathcal{T}_\sim} + 1.$$

Wir zeigen nun (4.63). Sei dazu $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p, q, \mathcal{T}_\mathcal{K} \sim}$. Gilt $(p^*, q) = \text{root}(\mathcal{T}_{p, q, \mathcal{T}_\mathcal{K} \sim}) = (p, q)$, so folgt $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p, q, \mathcal{T}_\mathcal{K} \sim}^{(0)}$. Es gelte nun $(p^*, q) \neq \text{root}(\mathcal{T}_{p, q, \mathcal{T}_\mathcal{K} \sim})$, dann existiert ein Pfad

$$((p_0, q_0), \dots, (p_n, q_n))$$

mit $n \in \mathbb{N}$ von $\text{root}(\mathcal{T}_{p, q, \mathcal{T}_\mathcal{K} \sim})$ nach (p^*, q) in $\mathcal{T}_{p, q, \mathcal{T}_\mathcal{K} \sim}$ — da $(p^*, q) \neq \text{root}(\mathcal{T}_{p, q, \mathcal{T}_\mathcal{K} \sim})$ gilt, folgt $n \neq 0$. Nach Definition der Söhne in $\mathcal{T}_{p, q, \mathcal{T}_\mathcal{K} \sim}$ gilt

$$(p_i, q_i) \in \text{sons}_{\mathcal{A}}((p_{i-1}, q_{i-1})) = \text{sons}^*(p_{i-1}) \times \{q_{i-1}\}$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Wir zeigen nun $\text{level}(p^*) \leq \text{level}(q)$. Gilt $(p^*, q) = (p_n, q_n) \in \mathcal{T}_{p, q, \mathcal{T}_\mathcal{K} \sim}^-$, so folgt nach Lemma 4.3.37 über die Charakterisierung aller unzulässigen Blöcke in Assemblierungsbäumen $\text{level}(p^*) \leq \text{level}(q)$. Falls $(p^*, q) = (p_n, q_n) \notin \mathcal{T}_{p, q, \mathcal{T}_\mathcal{K} \sim}^-$ gilt, folgt mit $(p_n, q_n) \in \text{sons}_{\mathcal{A}}((p_{n-1}, q_{n-1}))$ und $q_n = q$ auch $q_{n-1} = q$. Des Weiteren muss $(p_{n-1}, q_{n-1}) = (p_{n-1}, q)$ unzulässig sein, womit $\text{sons}_{\mathcal{A}}((p_{n-1}, q)) = \text{sons}(p_{n-1}) \times \{q\}$ und $p_{n-1} \mathcal{T}_\mathcal{K} \sim q$ sowie nach Lemma 4.3.37 $\text{level}(p_{n-1}) \leq \text{level}(q)$ gelten. Aus der Eigenschaft $\text{sons}_{\mathcal{A}}((p_{n-1}, q)) \neq \emptyset$ folgt $\text{level}(p_{n-1}) \neq \text{level}(q)$, also $\text{level}(p_{n-1}) < \text{level}(q)$ und mit $p_n \in \text{sons}(p_{n-1})$ auch in diesem Fall $\text{level}(p^*) = \text{level}(p_n) \leq \text{level}(q)$.

Es gilt dann

$$0 \leq \text{level}(p^*) - \text{level}(p) \leq \text{level}(q) - \text{level}(p) \leq C_{L_1, \mathcal{T}_\sim} + 1$$

und damit insgesamt

$$\mathcal{T}_{p, q, \mathcal{T}_\mathcal{K} \sim} \subseteq \bigcup_{\ell=0}^{C_{L_1, \mathcal{T}_\sim} + 1} \mathcal{T}_{p, q, \mathcal{T}_\mathcal{K} \sim}^{(\ell)}. \quad (4.65)$$

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

Wir zeigen nun $\#\mathcal{T}_{p,q,\tau_K}^{(\ell)} \leq C_{\text{sons},\tau_K}^\ell$ für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ per Induktion. Für $\ell = 0$ gilt $\#\mathcal{T}_{p,q,\tau_K}^{(0)} \leq 1 = C_{\text{sons},\tau_K}^0$. Sei nun $\ell \in \mathbb{N}_0$ so gegeben, dass

$$\#\mathcal{T}_{p,q,\tau_K}^{(\ell)} \leq C_{\text{sons},\tau_K}^\ell$$

gilt. Für $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\tau_K}^{(\ell+1)}$ gilt nach Definition $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\tau_K}$ und $\text{level}(p^*) - \text{level}(p) = \ell + 1 > 0$. Es folgt somit $p^* \neq p$, also $(p^*, q) \neq (p, q) = \text{root}(\mathcal{T}_{p,q,\tau_K})$, was wiederum die Existenz eines Vaters von (p^*, q) in \mathcal{T}_{p,q,τ_K} liefert. Dieser hat nach Konstruktion die Form $(p^+, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\tau_K}$ mit $p^+ := \text{father}(p^*)$, was insbesondere

$$\text{level}(p^+) - \text{level}(p) = \text{level}(p^*) - 1 - \text{level}(p) = \ell + 1 - 1 = \ell$$

und somit $(p^+, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\tau_K}^{(\ell)}$ bedeutet. Es folgt also

$$\mathcal{T}_{p,q,\tau_K}^{(\ell+1)} \subseteq \bigcup_{(p^+, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\tau_K}^{(\ell)}} \text{sons}(p^+) \times \{q\}$$

und damit nach Induktionsvoraussetzung

$$\#\mathcal{T}_{p,q,\tau_K}^{(\ell+1)} \leq C_{\text{sons},\tau_K} \#\mathcal{T}_{p,q,\tau_K}^{(\ell)} \leq C_{\text{sons},\tau_K}^{\ell+1}.$$

Die Induktion ist damit vollständig. Mit (4.65), $C_{\text{sons},\tau_K} \geq 2$ und der geometrischen Reihe ergibt sich

$$\begin{aligned} \#\mathcal{T}_{p,q,\tau_K} &\leq \sum_{\ell=0}^{C_{L_1,\tau_K}+1} \#\mathcal{T}_{p,q,\tau_K}^{(\ell)} \leq \sum_{\ell=0}^{C_{L_1,\tau_K}+1} C_{\text{sons},\tau_K}^\ell \\ &= C_{\text{sons},\tau_K}^{C_{L_1,\tau_K}+1} \sum_{\ell=0}^{C_{L_1,\tau_K}+1} C_{\text{sons},\tau_K}^{-\ell} \leq 2C_{\text{sons},\tau_K}^{C_{L_1,\tau_K}+1}, \end{aligned}$$

also die Aussage.

(b) Es gelte $\text{level}(p) > \text{level}(q)$ mit $q \notin \mathcal{L}_K$. Da $\tau_{\mathcal{I}}$ und $\tau_{\mathcal{J}}$ vererbbar sind, gilt dies nach Korollar 4.2.26 auch für $\tau_{\mathcal{I}} \sim^T$ und $\tau_{\mathcal{J}} \sim^T$. Des Weiteren ist die transponierte Blockrelation \sim^T die Blockrelation zu $\tau_{\mathcal{I}} \sim^T$ und $\tau_{\mathcal{J}} \sim^T$ (siehe Korollar 4.2.27). Mit der Darstellung des transponierten Relationsbaums über die transponierte Relation (vgl. Lemma 4.2.28) folgt $(b, b') \in \mathcal{L}_{\sim^T}^-$ aus $(b', b) \in \mathcal{L}_{\sim}^-$, womit Teil (a) dieses Lemmas

$$\#\mathcal{T}_{q,p,\tau_K} \sim^T \leq 2C_{\text{sons},\tau_K}^{C_{L_1,\tau_K}+1}$$

liefert. Nach Korollar 3.4.20 folgt $C_{L_1,\tau_K} = C_{L_2,\tau_K}$ und damit die zu beweisende Aussage. \square

Bemerkung 4.3.53 (Schwachbesetztheit). *Es seien die Voraussetzungen von Lemma 4.3.52 gegeben. Wie in Bemerkung 4.3.20 über die Schwachbesetztheit eines Auswertungsbaums lässt sich die Mächtigkeit eines Assemblierungsbaums genau dann unabhängig von $\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$ beschränken, wenn für diesen Baum eine Schwachbesetztheitskonstante existiert.*

Gilt $\text{level}(p) < \text{level}(q)$ mit $p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{K}}$, dann folgt durch die Verwendung des konstanten Teilbaums $\bar{\mathcal{T}}_q = \{q\}$ als Spaltenclusterbaum

$$\text{col}(\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{K}}\sim}, q) \times \{q\} = \mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{K}}\sim}$$

und für alle Elemente $p^ \in \mathcal{T}_{p,q}$ des Abschnittsbaums $\mathcal{T}_{p,q}$ — welcher als Zeilenclusterbaum dient — die Aussage*

$$\text{row}(\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{K}}\sim}, p^*) \subseteq \{q\}.$$

Die Existenz einer Schwachbesetztheitskonstante von $\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{K}}\sim}$ ist damit äquivalent dazu, dass sich $\#\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{K}}\sim}$ unabhängig von $\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$ beschränken lässt.

Analog ergibt sich diese Äquivalenz für den Assemblierungsbaum $\mathcal{T}_{q,p,\mathcal{T}_{\mathcal{K}}\sim^T}$ unter der Voraussetzung $\text{level}(p) > \text{level}(q)$ mit $q \notin \mathcal{L}_{\mathcal{K}}$.

Mit dem Lemma 4.3.52 sind wir nun in der Lage, den Aufwand von Algorithmus 4.3.15 abzuschätzen. Dieser Algorithmus wird verwendet, falls für $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $(b', b) \in \mathcal{L}_{\sim(A,B)}^-$ im Bezug auf die beiden Zeilen- bzw. Spaltencluster einer der vorher beschriebenen Sonderfälle auftritt. Gilt beispielsweise

$$\text{level}(t') < \text{level}(t) \quad \text{mit} \quad t' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}},$$

so sind alle Interaktionsmatrizen in $\mathcal{T}_{t',t,\sim_A}^-$ durch Algorithmus 4.3.15 zu assemblieren. Liegt der Fall

$$\text{level}(t') > \text{level}(t) \quad \text{mit} \quad t \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$$

vor, so wird Algorithmus 4.3.15 zur Berechnung aller Interaktionsmatrizen in $\mathcal{T}_{t,t',\sim_A^T}^-$ verwendet. Analog müssen für die beiden Spaltencluster s' und s ggf. alle zu unzulässigen Blöcken aus $\mathcal{T}_{s',s,\sim_B}$ oder $\mathcal{T}_{s,s',\sim_B^T}$ gehörende Interaktionsmatrizen durch Algorithmus 4.3.15 berechnet werden. Nach Lemma 4.3.42 brauchen wir den Algorithmus für das Assemblieren aller Interaktionsmatrizen in $\mathcal{T}_{t,t',\sim_A^T}^-$ und $\mathcal{T}_{s,s',\sim_B^T}^-$ lediglich für die transponierten Matrizen A^* bzw. B^* zu betrachten und die so berechneten Interaktionsmatrizen anschließend zu transponieren, um die gewünschten Koeffizientenmatrizen des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems zu erhalten.

Wir untersuchen nun die relevanten — also durch die Voraussetzung von Lemma 4.3.52 gegebenen — Fälle, um in diesen den Aufwand von Algorithmus 4.3.15 abzuschätzen.

Lemma 4.3.54 (Aufwand von Algorithmus 4.3.15). *Seien ein Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, zwei geschachtelte Clusterbasen $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $(W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ sowie zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ gegeben. Es bezeichnen \asymp_A und \asymp_B die Matrix-Galerkin-Clusterrelationen bzgl. A in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ bzw. B in $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ sowie $\asymp_{(A,B)}$ die zugehörige Blockrelation.*

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

Seien weiter $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $(b', b) \in \mathcal{L}_{\asymp(A, B)}^-$ sowie $(p, q, \mathcal{K}) \in \{(t', t, \mathcal{I}), (s', s, \mathcal{J})\}$, dann benötigt Algorithmus 4.3.15 mit

$$k_{\max} := \max_{\tilde{t} \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}, \tilde{s} \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}} \{\#K_{\tilde{t}}, \#L_{\tilde{s}}\} \quad \text{und} \quad C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}} := \max_{r \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}}} \# \text{sons}(r) \geq 2$$

(a) im Fall von $\text{level}(p) < \text{level}(q)$ mit $p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ nicht mehr als

$$6C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}}^{C_{L_1, \mathcal{T}_{\asymp(A, B)}} + 2} k_{\max}^3$$

und

(b) im Fall von $\text{level}(p) > \text{level}(q)$ mit $q \notin \mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ nicht mehr als

$$6C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}}^{C_{L_2, \mathcal{T}_{\asymp(A, B)}} + 2} k_{\max}^3$$

arithmetische Operationen.

Beweis. Sei $M \in \mathbb{R}^{\mathcal{K} \times \mathcal{K}}$ mit

$$M := \begin{cases} A & , \text{ falls } \mathcal{K} = \mathcal{I}, \\ B & , \text{ falls } \mathcal{K} = \mathcal{J}. \end{cases}$$

(a) Es gelte $\text{level}(p) < \text{level}(q)$ mit $p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{K}}$. In diesem Fall ist der Assemblierungsbaum $\mathcal{T}_{p, q, \asymp_M}$ zu betrachten. Für ein Element $p^* \in \mathcal{T}_{p, q}$ des Abschnittsbaums $\mathcal{T}_{p, q}$ mit $q \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{p, q, \asymp_M}, p^*)$ und $\text{sons}(p^*) \neq \emptyset$ fallen für die Berechnung der Interaktionsmatrix des Blocks (p^*, q) nach Lemma 4.3.50 (a) nicht mehr als

$$3C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}} k_{\max}^3$$

arithmetische Operationen an. Für alle $p^* \in \mathcal{T}_{p, q}$ mit $q \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{p, q, \asymp_M}, p^*)$ folgt $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p, q, \asymp_M}^- \subseteq \mathcal{T}_{p, q, \asymp_M}$, womit sich der Aufwand von Algorithmus 4.3.15 unter Verwendung von Lemma 4.3.52 (a) durch

$$\begin{aligned} \sum_{(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p, q, \asymp_M}^-} 3C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}} k_{\max}^3 &\leq 3C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}} k_{\max}^3 \# \mathcal{T}_{p, q, \asymp_M} \\ &\leq 6C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}}^{C_{L_1, \mathcal{T}_{\asymp(A, B)}} + 2} k_{\max}^3 \end{aligned}$$

beschränken lässt.

(b) Es gelte $\text{level}(p) > \text{level}(q)$ mit $q \notin \mathcal{L}_{\mathcal{K}}$, dann ist in diesem Fall der Assemblierungsbaum $\mathcal{T}_{q, p, \asymp_M^T}$ zu betrachten. Der Aufwand von Algorithmus 4.3.15 lässt sich nun

mit einer analogen Argumentation wie in Teil (a) dieses Lemmas und unter Verwendung von Lemma 4.3.52 (b) durch

$$\begin{aligned} \sum_{(q^*, p) \in \mathcal{T}_{q, p, \prec_M^T}^-} 3C_{\text{sons}, \mathcal{T}_K} k_{\max}^3 &\leq 3C_{\text{sons}, \mathcal{T}_K} k_{\max}^3 \# \mathcal{T}_{q, p, \prec_M^T} \\ &\leq 3C_{\text{sons}, \mathcal{T}_K}^{C_{L_2, \mathcal{T}_{\prec(A, B)}} + 2} k_{\max}^3 \end{aligned}$$

beschränken. \square

Mit dem folgenden Satz kombinieren wir die vorher bewiesenen Abschätzungen für eine obere Schranke der maximalen Anzahl an arithmetischen Operationen des Algorithmus 4.3.16, der das globale Assemblieren des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems abbildet.

Satz 4.3.55 (Aufwand von Algorithmus 4.3.16). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ -schwachbesetzter Blockbaum, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ eine $C_{\text{sp}, A}$ - und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ eine $C_{\text{sp}, B}$ -schwachbesetzte Matrix, $\prec_{(A, B)}$ die Matrix-Galerkin-Blockrelation bzgl. A und B in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie \prec_A und \prec_B die dieser Blockrelation zugrundeliegenden Matrix-Galerkin-Clusterrelationen. Seien weiter $(V, E, K)_{\mathcal{T}_I}$ und $(W, F, L)_{\mathcal{T}_J}$ zwei geschachtelte Clusterbasen sowie $\mathcal{T}_{\prec(A, B)}$ $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec(A, B)}}$ -, \mathcal{T}_{\prec_A} $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_A}}$ - und \mathcal{T}_{\prec_B} $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_B}}$ -schwachbesetzt, dann benötigt Algorithmus 4.3.16 mit*

$$\begin{aligned} k_{\max} &:= \max_{t \in \mathcal{T}_I, s \in \mathcal{T}_J} \{\#K_t, \#L_s\}, \\ C_{\text{sons}} &:= \max_{t \in \mathcal{T}_I, s \in \mathcal{T}_J} \{\# \text{sons}(t), \# \text{sons}(s)\} \geq 2 \text{ und} \\ C_{L, \mathcal{T}_{\prec(A, B)}} &:= \max \left\{ C_{L_1, \mathcal{T}_{\prec(A, B)}}, C_{L_2, \mathcal{T}_{\prec(A, B)}} \right\} \end{aligned}$$

sowie

$$C_1 := 3 \max \{C_{\text{sp}, A}, C_{\text{sp}, B}\}$$

und

$$C_2 := 6C_{\text{sons}}^2 \left(\max \left\{ C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_A}}, C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_B}} \right\} + C_{\text{sons}}^{C_{L, \mathcal{T}_{\prec(A, B)}}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec(A, B)}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \right)$$

nicht mehr als

$$C_1 k_{\max}^2 (\#\mathcal{I} + \#\mathcal{J}) + C_2 k_{\max}^3 (\#\mathcal{T}_I + \#\mathcal{T}_J)$$

arithmetische Operationen.

Beweis. Das Assemblieren aller Interaktionsmatrizen in $\mathcal{L}_{\prec_A}^-$ und $\mathcal{L}_{\prec_B}^-$ — jeweils durch Algorithmus 4.3.10 — benötigt nach Lemma 4.3.49 zusammen nicht mehr als

$$3C_{\text{sp}, A} k_{\max}^2 \#\mathcal{I} + 3C_{\text{sp}, B} k_{\max}^2 \#\mathcal{J} \leq 3 \max \{C_{\text{sp}, A}, C_{\text{sp}, B}\} k_{\max}^2 (\#\mathcal{I} + \#\mathcal{J}) \quad (4.66)$$

arithmetische Operationen.

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

Für das Aufstellen aller Interaktionsmatrizen in $\mathcal{T}_{\prec_A}^-$ und $\mathcal{T}_{\prec_B}^-$ entstehen nach Lemma 4.3.51 zusammen maximal

$$\begin{aligned} & 5C_{\text{sons}}^2 C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_A}} k_{\max}^3 \#\mathcal{T}_{\mathcal{I}} + 5C_{\text{sons}}^2 C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_B}} k_{\max}^3 \#\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \\ & \leq 5C_{\text{sons}}^2 \max\{C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_A}}, C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_B}}\} k_{\max}^3 (\#\mathcal{T}_{\mathcal{I}} + \#\mathcal{T}_{\mathcal{J}}) \end{aligned} \quad (4.67)$$

arithmetische Operationen.

Für alle $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $(b', b) \in \mathcal{L}_{\prec(A, B)}^-$ können maximal zwei Assemblierungsbäume zum Aufstellen der Koeffizientenmatrizen für (b', b) auftreten, maximal einer für die beiden Zeilencluster sowie maximal einer für die beiden Spaltencluster. Mit Lemma 3.2.23 (a) lässt sich die Mächtigkeit des Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ durch

$$\#\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \leq C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \min\{\#\mathcal{T}_{\mathcal{I}}, \#\mathcal{T}_{\mathcal{J}}\} \leq \frac{1}{2} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} (\#\mathcal{T}_{\mathcal{I}} + \#\mathcal{T}_{\mathcal{J}})$$

beschränken und mit $\mathcal{L}_{\prec(A, B)}^- \subseteq \mathcal{T}_{\prec(A, B)}$ ist die maximale Anzahl an benötigten Assemblierungsbäumen damit durch

$$\begin{aligned} \sum_{(b', b) \in \mathcal{L}_{\prec(A, B)}^-} 2 & \leq \sum_{(b', b) \in \mathcal{T}_{\prec(A, B)}} 2 = \sum_{b' \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \sum_{b \in \text{row}(\mathcal{T}_{\prec(A, B)}, b')} 2 \\ & \leq \sum_{b' \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} 2C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec(A, B)}} = 2C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec(A, B)}} \#\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \\ & \leq C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec(A, B)}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} (\#\mathcal{T}_{\mathcal{I}} + \#\mathcal{T}_{\mathcal{J}}) \end{aligned} \quad (4.68)$$

beschränkt. Seien nun $b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $b = (t, s) \in \text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\prec(A, B)}, b')$, also $(b', b) \in \mathcal{L}_{\prec(A, B)}^-$. Das Aufstellen der Interaktionsmatrix für die beiden Zeilencluster t' und t im Fall von $\text{level}(t') < \text{level}(t)$ mit $t' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ bzw. für die beiden Spaltencluster s' und s im Fall von $\text{level}(s') < \text{level}(s)$ mit $s' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$ durch Algorithmus 4.3.15 erfordert nach Lemma 4.3.54 (a) nicht mehr als

$$6C_{\text{sons}}^{C_{L1, \mathcal{T}_{\prec(A, B)}} + 2} k_{\max}^3 \quad (4.69)$$

arithmetische Operationen. Falls $\text{level}(t') > \text{level}(t)$ mit $t \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ bzw. $\text{level}(s') > \text{level}(s)$ mit $s \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$ gilt, ist der Aufwand von Algorithmus 4.3.15 zur Berechnung der entsprechenden Interaktionsmatrix nach Lemma 4.3.54 (b) durch

$$6C_{\text{sons}}^{C_{L2, \mathcal{T}_{\prec(A, B)}} + 2} k_{\max}^3 \quad (4.70)$$

beschränkt. Die Terme (4.69) und (4.70) lassen sich jeweils durch

$$6 \max \left\{ C_{\text{sons}}^{C_{L1, \mathcal{T}_{\prec(A, B)}} + 2}, C_{\text{sons}}^{C_{L2, \mathcal{T}_{\prec(A, B)}} + 2} \right\} k_{\max}^3 \leq 6C_{\text{sons}}^2 C_{\text{sons}}^{\max\{C_{L1, \mathcal{T}_{\prec(A, B)}}, C_{L2, \mathcal{T}_{\prec(A, B)}}\}} k_{\max}^3$$

abschätzen. Mit der oberen Schranke (4.68) für die maximale Anzahl an auftretenden Assemblierungsbäumen ist der Aufwand zum Assemblieren aller Interaktionsmatrizen in benötigten Assemblierungsbäumen durch

$$6C_{\text{sons}}^2 C_{\text{sons}}^{\max\left\{C_{L_1, \mathcal{T}_{\prec(A,B)}}, C_{L_2, \mathcal{T}_{\prec(A,B)}}\right\}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec(A,B)}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} k_{\max}^3 (\#\mathcal{T}_{\mathcal{I}} + \#\mathcal{T}_{\mathcal{J}}) \quad (4.71)$$

beschränkt. Durch die Addition von (4.66), (4.67) und (4.71) — mit der trivialen Abschätzung $5 \leq 6$ — ergibt sich die zu beweisende Aussage. \square

Bemerkung 4.3.56 (Asymptotisches Verhalten). *Es seien die Voraussetzungen des obigen Satzes 4.3.55 gegeben. Schätzen wir die Mächtigkeiten der Clusterbäume $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ mit Lemma 3.1.7 gegen die Mächtigkeiten von \mathcal{I} bzw. \mathcal{J} ab, dann besagt dieser Satz, dass sich das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem bei einem konstanten maximalen Rang k_{\max} sowie der Beschränktheit von C_1 und C_2 unabhängig von $\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$ mit einem in $\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$ asymptotisch linearen Aufwand aufstellen lässt. Wird der maximale Rang bei wachsenden Dimensionen ($\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$) erhöht, so geht dieser kubisch in das asymptotische Verhalten ein. Dieses asymptotisch kubische Verhalten in k_{\max} ließe sich auf ein quadratisches reduzieren, wenn wir bei der Konstruktion von $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$*

$$\#\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim \frac{\#\mathcal{I}}{k_{\max}} \quad \text{sowie} \quad \#\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim \frac{\#\mathcal{J}}{k_{\max}}$$

sicherstellen würden. Im Kontext der \mathcal{H}^2 -Matrix-Theorie ist dies unter gewissen Voraussetzungen möglich (siehe z.B. [6, Lemma 3.48]).

Aufstellen von Assemblierungsbäumen

Wir haben in den vorherigen Abschnitten diskutiert, in welchen Situationen Assemblierungsbäume auftreten, wie mit deren Hilfe Interaktionsmatrizen berechnet werden und wie sich der Aufwand hierfür verhält. Es bleibt also noch zu beschreiben, wie diese Bäume aufgestellt werden können.

Für eine in einem Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ vererbte Blockrelation \sim lassen sich die Wurzeln aller benötigten Assemblierungsbäume mit einer Schleife über die Menge \mathcal{L}_{\sim}^- ermitteln. Es stellt sich nun die Frage, wie die unzulässigen Blöcke aller Assemblierungsbäume konstruiert werden können, ohne dabei den gewünschten asymptotisch linearen Aufwand — linear in $\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$ — zu übersteigen. Für eine Matrix-Galerkin-Clusterrelation \prec_A bzgl. $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ in einem Clusterbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ wurde in dem Abschnitt über das Aufstellen von Clusterrelationsbäumen (Seite 131 ff.) an einem Beispiel (Beispiel 4.3.24) verdeutlicht, dass ein naiver Ansatz zur Auswertung der Zulässigkeitsbedingung einen zu hohen Aufwand zur Folge haben kann. Das nachstehende Beispiel illustriert, dass dieser Effekt auch für das Aufstellen aller Assemblierungsbäume im Fall von Matrix-Galerkin-Clusterrelationen auftreten kann.

Beispiel 4.3.57 (Auswertung der Zulässigkeitsbedingung). *In Analogie zu dem Beispiel 4.3.24 betrachten wir für $n := 2^L$, $L \in \mathbb{N}$, und $\mathcal{I} := \mathcal{J} := \{1, \dots, n\}$ die Matrix $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$*

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

mit den Einträgen

$$a_{ij} := \begin{cases} 2 & , \text{ falls } i = j, \\ -1 & , \text{ falls } |i - j| = 1, \\ 0 & \text{ sonst} \end{cases}$$

für alle $i, j \in \mathcal{I}$ und nehmen an, dass der Zugriff auf alle Nicht-Null-Einträge einer Matrixzeile in $\mathcal{O}(1)$ realisierbar ist. Als zugrundeliegende Matrixgleichung verwenden wir

$$AXA^* = C$$

mit $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und der gesuchten Lösung $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$. Die rechte Seite C ist für die folgende Betrachtung unerheblich und nur der Vollständigkeit halber hier angegeben.

Wir definieren den Clusterbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} := \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$, wobei $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ so konstruiert sei, dass für alle Cluster $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ die zugehörige Beschriftung $\hat{s} \subseteq \mathcal{J}$ zusammenhängend und nicht permutiert ist. Es existieren also für alle $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ Elemente $a_s, b_s \in \mathcal{J}$ mit $a_s \leq b_s$ und $\hat{s} = \{a_s, a_s + 1, \dots, b_s\}$. Die Beschriftungen für Söhne entstehen durch Halbierung der Beschriftung des entsprechenden Vaters.

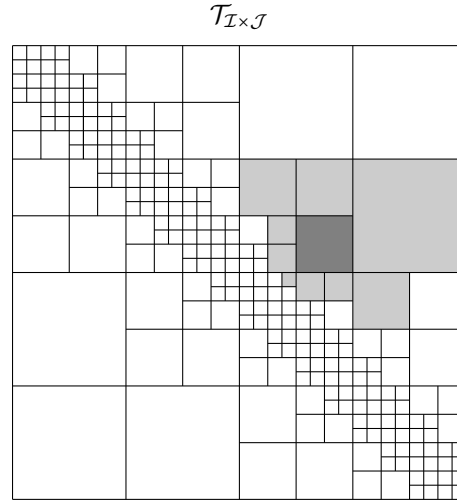


Abbildung 4.12: Zur Diagonale verfeinerter Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit markierter unzulässiger Blockzeile $\text{row}_{\mathcal{L}}^{\bar{}}$ in $\mathcal{T}_{\prec(A,A)}^{\prec}$ eines (dunkel grau gekennzeichneten) Blocks aus $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.

Weiter verwenden wir den durch Abbildung 4.12 gegebenen, auf $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ basierenden Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Dieser Baum entspricht einem Standardbeispiel aus dem Gebiet der \mathcal{H}^2 -Matrizen (vgl. z.B. [6, Chapter 2]). Auf die explizite Konstruktion und den Nachweis der Schwachbesetztheit verzichten wir an dieser Stelle und verweisen auf [6, Chapter 2 und Chapter 3] für eine ausführlichere Analyse.

Wir betrachten den Matrix-Galerkin-Blockrelationsbaum $\mathcal{T}_{\prec(A,A)}$, wobei $\prec_{(A,A)}$ die Matrix-Galerkin-Blockrelation bzgl. A und A in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie \prec_A die dieser — sowohl

für den Zeilen- als auch den Spaltenclusterbaum — zugrundeliegende Matrix-Galerkin-Clusterrelation bezeichne. Durch die tridiagonale Gestalt der Matrix A und die nicht permutierten Beschriftungen aller Cluster, stehen im Zeilen- und Spaltenclusterbaum nur „benachbarte“ Cluster in Clusterrelation zueinander. Für die Blätter $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ des Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ bedeutet dies, dass ein Block nur mit seinen direkten „Nachbarn“ in Blockrelation steht. Diese Situation ist in Abbildung 4.12 für einen — dunkel grau markierten — Block exemplarisch dargestellt. Es ist dort auch zu erkennen, dass zwei in Blockrelation stehende Blöcke maximal einen Levelunterschied von zwei aufweisen.

Wir nehmen an, dass bei wachsender Dimension $\#\mathcal{J}$ die Tiefe $\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}})$ des Clusterbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ wächst und der Blockbaum hin zur Diagonale verfeinert wird. Es werden also nur Blöcke auf der höchsten Stufe des Blockbaums weiter unterteilt.

Als Ausgangspunkt verwenden wir die in Abbildung 4.13 dargestellte Verfeinerungsstufe von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, bei der die Clusterbäume eine Tiefe von

$$\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}) = \text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}}) = 4$$

besitzen und betrachten die beiden dort markierten Relationen zweier Blöcke. Es gilt also

$$(b', b), (\tilde{b}', \tilde{b}) \in \mathcal{L}_{\sim(A, A)}^-.$$

Wie zu erkennen ist, erfüllen $(s', s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ sowie $(\tilde{s}', \tilde{s}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ die Voraussetzungen

$$\begin{aligned} \text{level}(s') &< \text{level}(s) \quad \text{mit} \quad s' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}} \\ \text{und} \quad \text{level}(\tilde{s}') &< \text{level}(\tilde{s}) \quad \text{mit} \quad \tilde{s}' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}} \end{aligned}$$

für die Verwendung eines Assemblierungsbaums zur Berechnung der jeweiligen Interaktionsmatrix. Es müssen also $\mathcal{T}_{s', s, \asymp_A}^-$ und $\mathcal{T}_{\tilde{s}', \tilde{s}, \asymp_A}^-$ konstruiert werden.

Bei wachsender Tiefe der Clusterbäume — und damit auch des Blockbaums — wiederholt sich diese Situation auf höheren Leveln des Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und des Clusterbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$. Für die nächste Stufe ist dies in Abbildung 4.14 dargestellt. Dort sind dann sechs Assemblierungsbäume zu konstruieren.

Bei weiterer Erhöhung der Dimension tritt also immer wieder der Fall auf, dass ein Assemblierungsbaum $\mathcal{T}_{s', s, \asymp_A}$ zu einer Wurzel $(s', s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ mit

$$\text{level}(s) - \text{level}(s') = 2$$

benötigt wird. Diese lokale Situation wird durch Abbildung 4.15 illustriert.

Mit den dortigen Bezeichnungen gilt

$$\text{level}(s'_i) = \text{level}(s) \quad \text{für alle } i \in \{3, 4, 5, 6\}$$

und damit $(s'_i, s) \in \mathcal{T}_{\asymp_A}^-$ für alle $i \in \{3, 4, 5, 6\}$ mit $s'_i \asymp_A s$. Gesondert zu betrachten sind also nur s'_1 und s'_2 . Nach Konstruktion der Cluster und der Matrix A gilt in diesem Beispiel immer

$$s'_1 \asymp_A s \quad \text{und} \quad s'_2 \not\asymp_A s,$$

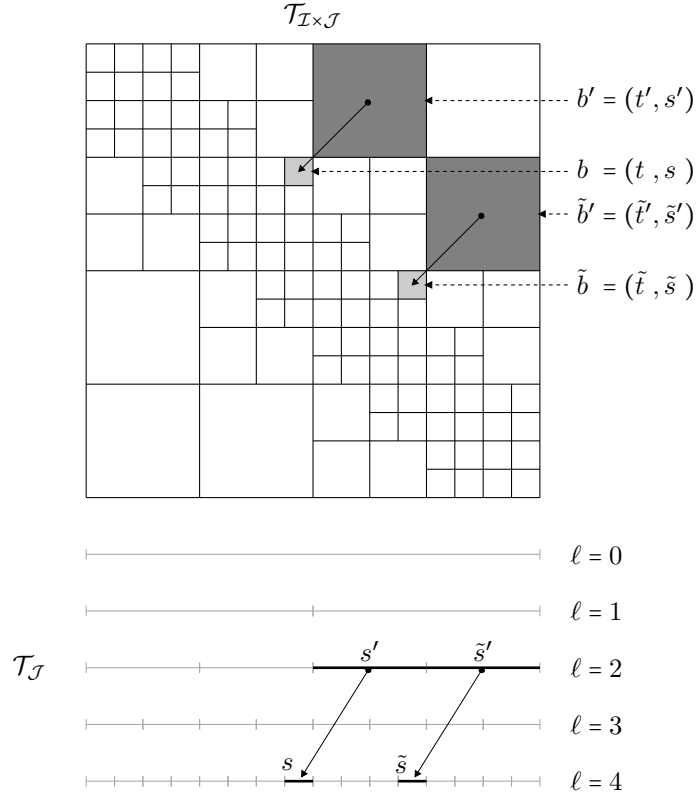


Abbildung 4.13: Zwei Elemente $(b', b), (\tilde{b}', \tilde{b}) \in \mathcal{L}_{(A,A)}^-$, bei denen Assemblierungsbäume für das Assemblieren der Koeffizientenmatrizen für die jeweiligen Spaltencluster benötigt werden.

da s'_1 und s „benachbart“ sind — s'_2 und s sind es nicht. Ein Algorithmus zum Aufstellen von $\mathcal{T}_{s',s,\asymp_A}$ müsste nun insbesondere $s'_1 \asymp_A s$ — aufgrund der Definition der Zulässigkeitsbedingung für Assemblierungsbäume — nur mit den Information, die durch s'_1, s sowie A gegeben sind, herausfinden. Es seien $a_{s'_1}, b_{s'_1}, a_s, b_s \in \mathcal{J}$ mit

$$\hat{s}'_1 = \{a_{s'_1}, a_{s'_1} + 1, \dots, b_{s'_1}\} \quad \text{und} \quad \hat{s} = \{a_s, a_s + 1, \dots, b_s\}.$$

Durch die „Nachbarschaft“ von s'_1 und s gilt $b_s + 1 = a_{s'_1}$, also $|a_{s'_1} - b_s| = 1$.

Wir nehmen nun an, dass uns zum Aufstellen aller unzulässigen Blöcke von $\mathcal{T}_{s',s,\asymp_A}$ lediglich die Wurzel (s', s) zur Verfügung steht und wir die weiteren Blöcke mit der üblichen, rekursiven Vorgehensweise konstruieren. Der Cluster s bleibt — durch die Verwendung des konstanten Clusterbaums $\bar{\mathcal{T}}_s$ als Spaltenclusterbaum von $\mathcal{T}_{s',s,\asymp_A}$ (vgl. Definition 4.3.36) — für die gesamte Betrachtung fest. Für die Konstruktion gehen wir nun zu den Söhnen von s' über und müssen — aufgrund der Definition der Zulässigkeitsbedingung — überprüfen, ob diese in Relation mit s stehen. Wir betrachten s'_1 und wollen herausfinden, ob $s'_1 \asymp_A s$ gegeben ist. Mit einem Aufwand in $\mathcal{O}(1)$ lässt sich nun feststellen,

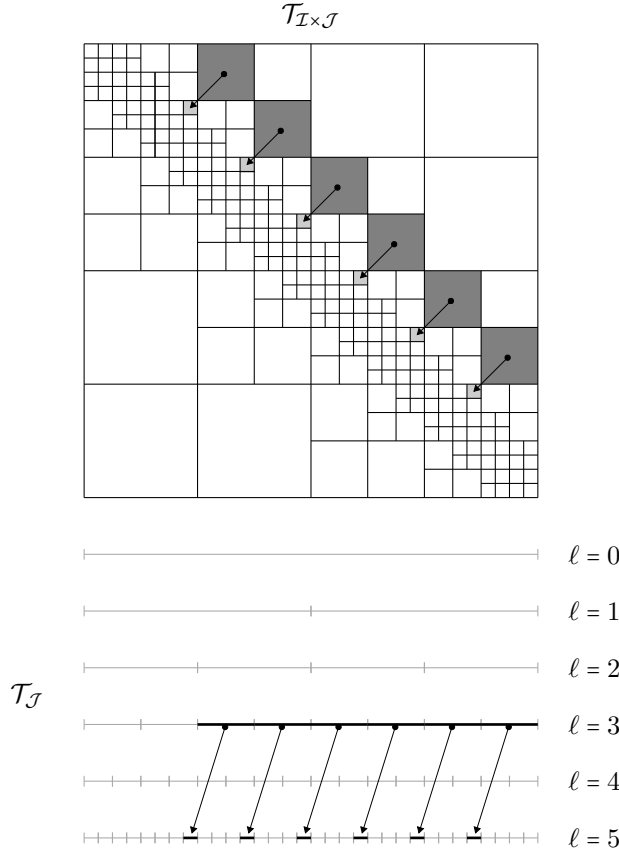


Abbildung 4.14: Markierte Blocktupel aus $\mathcal{L}_{\sim(A,A)}^-$, bei denen Assemblierungsbäume zum Aufstellen der Koeffizientenmatrizen für die jeweiligen (hervorgehobenen) Spaltenclusterkombinationen benötigt werden.

dass $a_{ij} \neq 0$ für $i := a_{s'_1} \in \hat{s}'_1$ und $j := b_s$ gilt. Zur algorithmischen Auswertung der Zulässigkeitsbedingung wäre dann $j \in \hat{s}$ zu suchen. Ein naiver Ansatz (vgl. Beispiel 4.3.24) würde die Beschriftung \hat{s} durchlaufen und aufgrund der Sortierung mit einem Aufwand von $\#\hat{s}$ feststellen, dass $b_s \in \hat{s}$ und somit $s'_1 \succ_A s$ gilt.

Die Situation aus Abbildung 4.15 tritt ab Level $\ell = 2$ für alle bis auf zwei Cluster dieser Stufe auf (vgl. Abbildung 4.13 und Abbildung 4.14). Für jeden dieser Fälle eines Levels entsteht ein Aufwand von $\#\hat{s}$, wobei s ein Cluster zwei Stufen tiefer im Clusterbaum ist.

Auf jeder Stufe $\ell \in \mathbb{N}_0$ existieren 2^ℓ Cluster $s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ mit $\#\hat{s} = n/2^\ell$. Wir setzen $\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}}) \geq 4$ voraus, dann ergibt sich für alle Level $\ell \in \{2, \dots, \text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}}) - 2\}$ ein Aufwand von

$$(2^\ell - 2) \frac{n}{2^{\ell+2}}$$

für die Auswertung der Zulässigkeitsbedingung in den oben beschriebenen benötigten Assemblierungsbäumen. Für die Gesamtheit dieser Bäume aller Stufen zusammen entsteht

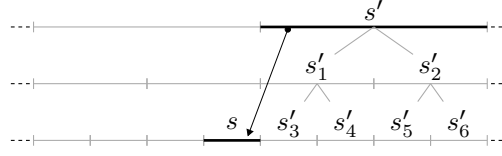


Abbildung 4.15: Lokal immer wieder auftretende Situation, in der die Konstruktion eines Assemblierungsbaums $\mathcal{T}_{s', s, \asymp_A}$ nötig ist.

also ein Aufwand (im Folgenden mit Eff bezeichnet) von

$$\begin{aligned}
 Eff &= \sum_{\ell=2}^{\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}})-2} (2^\ell - 2) \frac{n}{2^{\ell+2}} = \frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^{\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}})-2} (2^\ell - 2) \frac{n}{2^\ell} \\
 &= \frac{1}{4} n \left(\sum_{\ell=1}^{\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}})-2} 1 - \sum_{\ell=1}^{\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}})-2} 2^{-(\ell-1)} \right) \\
 &= \frac{1}{4} n \left(\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}}) - 2 - \sum_{\ell=0}^{\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}})-3} 2^{-\ell} \right) \\
 &= \frac{1}{4} n \left(\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}}) - 2 - 2(1 - 2^{-(\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}})-2)}) \right) \\
 &= \frac{1}{4} n \left(\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}}) - 4 + 2^{(3-\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}}))} \right).
 \end{aligned}$$

Mit $\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}}) \geq 4 \geq 0$ folgt

$$0 \leq 2^{(3-\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}}))} \leq 8$$

und damit

$$\frac{1}{4} n (\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}}) - 4) \leq Eff \leq \frac{1}{4} n (\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}}) + 4).$$

Obiges Beispiel 4.3.57 zeigt, dass das Aufstellen aller benötigten Assemblierungsbäume — bzw. aller unzulässigen Blöcke in diesen — von der Clusterbaumtiefe des Spaltenclusterbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ und/oder des Zeilenclusterbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ abhängen kann. Durch das typischerweise logarithmische Verhalten von $\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})$ und $\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}})$ entsteht ein im \mathcal{H}^2 -Matrix-Kontext zu hoher Aufwand.

In dem Abschnitt, der die Konstruktion aller unzulässigen Blöcke in Relationsbäumen beschreibt (Seite 131 ff.), entstand in Beispiel 4.3.24 eine ähnlich problematische Situation für den im obigen Beispiel dargestellten Zugang für die Auswertung der Zulässigkeitsbedingung. Die dort vorgeschlagene Lösung basierte auf der Idee, die unzulässigen Blöcke über die Menge aller unzulässigen Blätter zu konstruieren. Diese Idee wird im Folgenden auf Assemblierungsbäume angewendet, da auch von diesen nach Definition 4.3.41 der Interaktionsmatrizen nur unzulässige Blöcke von Interesse sind. Wir zeigen nun zunächst,

dass sich durch die Kenntnis der Wurzel und der Menge aller unzulässigen Blätter eines Assemblierungsbaums alle unzulässigen Blöcke dieses Baums konstruieren lassen. Falls möglich, werden in diesem Abschnitt wieder allgemeine Relationen ($\tau_{\mathcal{I}} \sim$, $\tau_{\mathcal{J}} \sim$ und \sim) verwendet, womit sich die hier vorgestellten Konzepte und Aussagen insbesondere auf Matrix-Galerkin-Cluster- bzw. -Blockrelationen übertragen lassen.

Lemma 4.3.58 (Unzulässige Blöcke). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum, $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ eine in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ vererbte Relation sowie $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $p \tau_{\mathcal{I}} \sim q$, $\text{level}(p) < \text{level}(q)$ und $p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, dann gilt $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$ genau dann, wenn $p^* \in \text{sons}^*(p)$ gilt und $(p^{**}, q) \in \text{sons}^*(p^*) \times \{q\}$ mit $(p^{**}, q) \in \mathcal{L}_{p,q,\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$ existiert.*

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$, dann gilt nach Lemma 4.3.37 über die Charakterisierung unzulässiger Blöcke in Assemblierungsbäumen $(p^*, q) \in \text{sons}^*(p) \times \{q\}$ mit $p^* \tau_{\mathcal{I}} \sim q$ und $\text{level}(p^*) \leq \text{level}(q)$. Aus $\text{level}(p^*) \leq \text{level}(q)$ folgt $0 \leq \text{level}(q) - \text{level}(p^*)$. Wir zeigen deshalb für alle $p^* \in \text{sons}^*(p)$ mit $p^* \tau_{\mathcal{I}} \sim q$ und $\text{level}(q) - \text{level}(p^*) \in \mathbb{N}_0$ die Existenz eines $p^{**} \in \text{sons}^*(p^*)$ mit $(p^{**}, q) \in \mathcal{L}_{p,q,\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$ per Induktion.

Für $p^* \in \text{sons}^*(p)$ mit $p^* \tau_{\mathcal{I}} \sim q$ und $\text{level}(q) - \text{level}(p^*) = 0$ folgt $\text{level}(p^*) = \text{level}(q)$, was nach dem Charakterisierungslemma 4.2.22 $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$ bedeutet. Mit Korollar 4.3.38 gilt dann $(p^*, q) \in \mathcal{L}_{p,q,\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$ und durch Setzen von $p^{**} := p^*$ folgt die Aussage in diesem Fall.

Sei nun $\ell \in \mathbb{N}_0$ so gegeben, dass für alle $p^* \in \text{sons}^*(p)$ mit $p^* \tau_{\mathcal{I}} \sim q$ und $\text{level}(q) - \text{level}(p^*) = \ell$ ein $p^{**} \in \text{sons}^*(p^*)$ mit $(p^{**}, q) \in \mathcal{L}_{p,q,\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$ existiert.

Für $p^* \in \text{sons}^*(p)$ mit $p^* \tau_{\mathcal{I}} \sim q$ und $\text{level}(q) - \text{level}(p^*) = \ell + 1 > 0$ folgt $\text{level}(p^*) < \text{level}(q)$. Gilt $p^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, dann liefert das Charakterisierungslemma 4.2.22 mit $p^* \tau_{\mathcal{I}} \sim q$ wieder $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$ und damit folgt nach Korollar 4.3.38 $(p^*, q) \in \mathcal{L}_{p,q,\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$, also die Aussage mit $p^{**} := p^*$. Im Fall von $p^* \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ existiert aufgrund von $p^* \tau_{\mathcal{I}} \sim q$ und der Vererbbarkeit von $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ ein $\tilde{p}^* \in \text{sons}^+(p^*) = \text{sons}(p^*)$ mit $\tilde{p}^* \tau_{\mathcal{I}} \sim q$. Da

$$\text{level}(q) - \text{level}(\tilde{p}^*) = \text{level}(q) - \text{level}(p^*) - 1 = \ell + 1 - 1 = \ell$$

gilt und aus $\tilde{p}^* \in \text{sons}(p^*)$ sowie $p^* \in \text{sons}^*(p)$ die Aussage $\tilde{p}^* \in \text{sons}^*(p)$ folgt, liefert die Induktionsvoraussetzung die Existenz eines $p^{**} \in \text{sons}^*(\tilde{p}^*)$ mit $(p^{**}, q) \in \mathcal{L}_{p,q,\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$. Aus $\tilde{p}^* \in \text{sons}(p^*)$ und $p^{**} \in \text{sons}^*(\tilde{p}^*)$ folgt $p^{**} \in \text{sons}^*(p^*)$ und damit die Aussage.

„ \Leftarrow “: Seien $p^* \in \text{sons}^*(p)$ und $(p^{**}, q) \in \text{sons}^*(p^*) \times \{q\}$ mit $(p^{**}, q) \in \mathcal{L}_{p,q,\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$, dann folgt nach Korollar 4.3.38 $\text{level}(p^{**}) \leq \text{level}(q)$. Aus $p^{**} \in \text{sons}^*(p^*)$ ergibt sich $p^* \in \text{pred}(p^{**})$, also $\text{level}(p^*) \leq \text{level}(q)$, und die Unzulässigkeit von (p^{**}, q) in $\mathcal{T}_{p,q,\tau_{\mathcal{I}} \sim}$ liefert $p^{**} \tau_{\mathcal{I}} \sim q$. Da $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ vererbbar ist, folgt $p^* \tau_{\mathcal{I}} \sim q$. Es gilt also $(p^*, q) \in \text{sons}^*(p) \times \{q\}$ mit $p^* \tau_{\mathcal{I}} \sim q$ und $\text{level}(p^*) \leq \text{level}(q)$, was mit der Charakterisierung unzulässiger Blöcke in $\mathcal{T}_{p,q,\tau_{\mathcal{I}} \sim}$ nach Lemma 4.3.37 $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\tau_{\mathcal{I}} \sim}^-$ bedeutet. \square

Die Aussage des Lemmas 4.3.58 ist in Abbildung 4.16 noch einmal illustriert. Dort beschreibt $p^{**} \in \text{sons}^*(p^*)$ den Nachfahren von p^* , der zusammen mit q ein unzulässiges Blatt des Assemblierungsbaums zur Wurzel (p, q) darstellt.

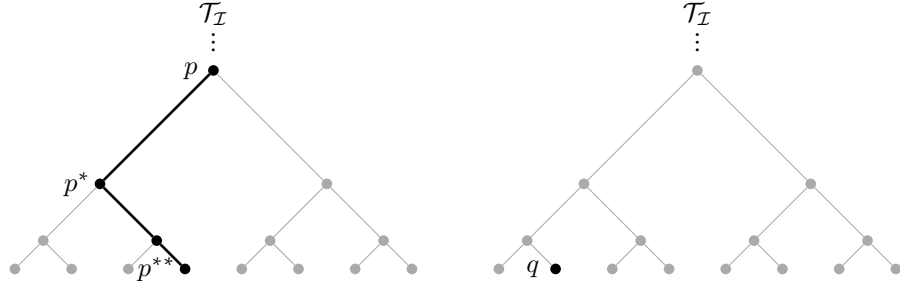


Abbildung 4.16: Veranschaulichung der Aussage aus Lemma 4.3.58. Es gilt $(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\tau_I}^-$ und $(p^{**}, q) \in \text{sons}^*(p^*) \times \{q\}$ mit $(p^{**}, q) \in \mathcal{L}_{p,q,\tau_I}^-$.

Nach Lemma 4.3.58 benötigen wir neben der Wurzel eines Assemblierungsbaums somit zusätzlich noch die Menge dessen unzulässiger Blätter. Wie genau wir an diese Informationen gelangen, wird im Fokus der folgenden Diskussion stehen.

Für die Motivation der hier verwendeten Variante seien wieder $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $\prec_{(A,B)}$ die Matrix-Galerkin-Blockrelation bzgl. zweier Matrizen $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ sowie \prec_A und \prec_B die dieser Blockrelation zugrundeliegenden Matrix-Galerkin-Clusterrelationen. Beim Aufstellen der Menge $\mathcal{L}_{\prec_{(A,B)}}^-$ durch Algorithmus 4.3.4 wird im Fall von

$$b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \quad \text{und} \quad b^+ = (t^+, s^+) \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}, b')$$

der Algorithmus 4.3.5 aufgerufen. Dort wird der Block b' dann künstlich unterteilt und der Algorithmus ggf. mit diesen künstlichen Söhnen rekursiv aufgerufen. Existiert nun ein $b \in \text{sons}^*(b^+) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $(b', b) \in \mathcal{L}_{\prec_{(A,B)}}^-$, so zeigt Satz 4.3.18 — bzw. Lemma 4.3.16 —, dass dieses Tupel durch Algorithmus 4.3.5 erreicht und der Menge $\mathcal{L}_{\prec_{(A,B)}}^-$ hinzugefügt wird. Diese Situation ist exemplarisch in Abbildung 4.17 dargestellt. Es gilt dort $\text{level}(s') < \text{level}(s)$ mit $s' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$, womit in diesem Fall die unzulässigen Blöcke des Assemblierungsbaums $\mathcal{T}_{s',s,\prec_B}$ zum Aufstellen der entsprechenden Interaktionsmatrix benötigt werden. Die Cluster $s'_1, s'_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ bezeichnen dort diejenigen Elemente, für die $(s'_1, s), (s'_2, s) \in \mathcal{L}_{s',s,\prec_B}^-$ gilt. Die Idee ist nun, diese Cluster simultan zum Aufstellen der Menge $\mathcal{L}_{\prec_{(A,B)}}^-$ im Zuge von Algorithmus 4.3.5 abzuspeichern.

Damit dieser Ansatz funktioniert, müssen Cluster $t'_1, t'_2 \in \text{sons}^*(t')$ so existieren, dass die Tupel (t'_1, s'_1) und (t'_2, s'_2) — als künstliche Nachfahren von $b' = (t', s')$ — von Algorithmus 4.3.5 durchlaufen werden. Dieser Fall ist in Abbildung 4.18 illustriert. Es gelte dort $t'_1 \prec_A t$ und $t'_2 \prec_A t$ sowie $s'_1 \prec_B s$ und $s'_2 \prec_B s$. Der Block $b = (t, s)$ steht also in Relation mit den Tupeln (t'_1, s'_1) , (t'_1, s'_2) , (t'_2, s'_1) und (t'_2, s'_2) .

Für die theoretische Beschreibung des Algorithmus 4.3.5 in dem Fall aus Abbildung 4.17 bzw. Abbildung 4.18 haben wir den Auswertungsbaum $\mathcal{T}_{(b',b^+),\prec_{(A,B)}}$ zu betrachten. In der Terminologie dieses Baums erfüllen t'_1 und t'_2 aufgrund von $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ somit die

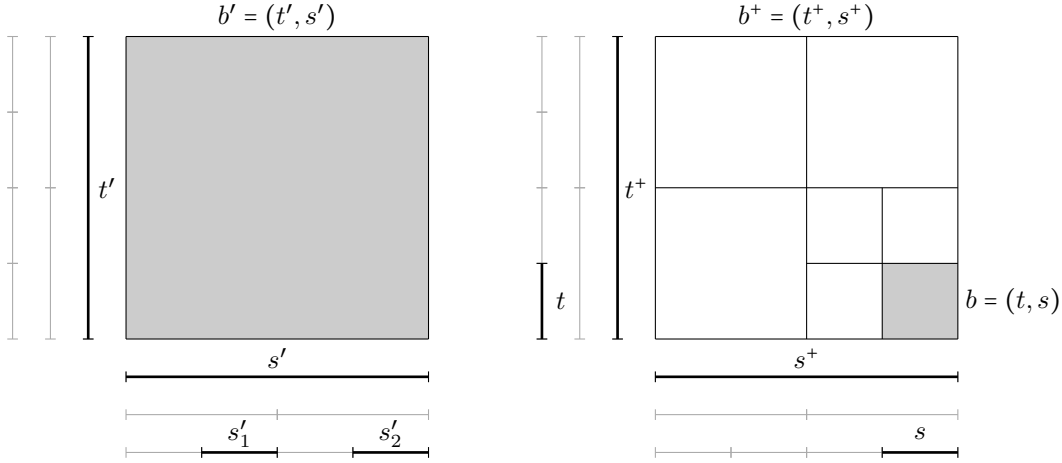


Abbildung 4.17: Blätter $b' = (t', s')$, $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $(b', b) \in \mathcal{L}_{\sim(A, B)}^-$, $b \in \text{sons}^*(b^+) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $\text{level}(s') < \text{level}(s)$ sowie $s' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$. Die zu bestimmenden unzulässigen Blätter von $\mathcal{T}_{s', s, \asymp_B}$ sind exemplarisch durch $(s'_1, s), (s'_2, s) \in \mathcal{L}_{s', s, \asymp_B}^-$ gegeben.

Bedingung

$$(b', (t'_i, s'_j), b) \in \mathcal{L}_{(b', b^+), \asymp(A, B)}^-$$

für alle $i, j \in \{1, 2\}$. Es hätte in diesem Beispiel also auch nur einer der beiden Cluster t'_1 und t'_2 ausgereicht, um Elemente

$$(b', (t'_i, s'_1), b), (b', (t'_i, s'_2), b) \in \mathcal{L}_{(b', b^+), \asymp(A, B)}^-$$

für entweder $i = 1$ oder $i = 2$ zu finden. Wird in Algorithmus 4.3.5 nun der Block b der Menge $\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\sim(A, B)}, b')$ hinzugefügt, so können wir uns für den Aufruf mit $(b', (t'_1, s'_1), b)$ — oder $(b', (t'_2, s'_1), b)$ — den Cluster s'_1 und für den Aufruf mit $(b', (t'_1, s'_2), b)$ — oder $(b', (t'_2, s'_2), b)$ — den Cluster s'_2 merken.

Es könnte potentiell auch der Fall aus Abbildung 4.19 auftreten. Dort gilt dann

$$(b', (\tilde{t}', s'_1), b), (b', (\tilde{t}, s'_2), b) \in \mathcal{L}_{(b', b^+), \asymp(A, B)}^-,$$

allerdings $\text{level}(s'_1) > \text{level}(s)$ und $\text{level}(s'_2) > \text{level}(s)$. Die beiden Tupel (s'_1, s) und (s'_2, s) können damit nach Korollar 4.3.38 keine unzulässigen Blätter in $\mathcal{T}_{s', s, \asymp_B}$ sein. Diese sind hier durch (s'_1, s) und (s'_2, s) aus Abbildung 4.19 gegeben. Wie dort zu erkennen ist, lassen sich die beiden Cluster s'_1 und s'_2 über die Verbindung zu den Vätern von s'_1 und s'_2 rekonstruieren. Liegen s'_1 und s'_2 auf einem noch höheren Level im Clusterbaum, so lassen sich s'_1 sowie s'_2 eventuell nicht direkt über den Vater sondern lediglich über die Menge der Vorfahren identifizieren.

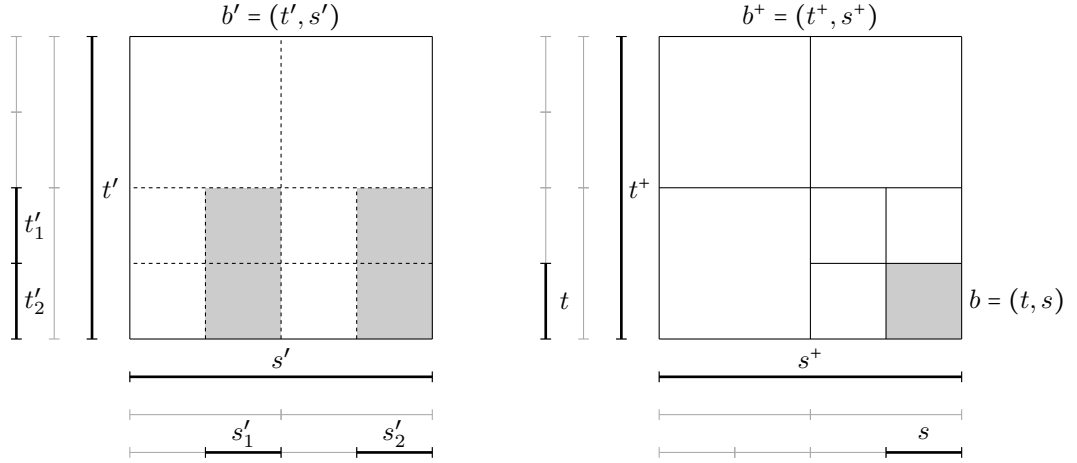


Abbildung 4.18: Tupel (t'_1, s'_1) , (t'_1, s'_2) , (t'_2, s'_1) und (t'_2, s'_2) , für die $(b', (t'_i, s'_j), b) \in \mathcal{L}^-_{(b', b^+), \asymp_{(A, B)}}$ für alle $i, j \in \{1, 2\}$ gilt.

Dieses exemplarische Vorgehen wird nun allgemein — also wieder mit allgemeinen Relationen $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$, $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim$ und \sim — formuliert und es wird gezeigt, dass dadurch die Menge der unzulässigen Blätter eines benötigten Assemblierungsbaums aufgestellt werden kann. Abschließend werden die Algorithmen 4.3.5 und 4.3.6 so modifiziert, dass neben der Menge \mathcal{L}^- auch alle Informationen zum Aufstellen von Assemblierungsbäumen konstruiert werden.

In der folgenden Definition führen wir zunächst *Komponentenabbildungen* für Auswertungs bäume ein, die es uns ermöglichen, auf die Zeilen- bzw. Spaltencluster von, im Zuge der Algorithmen 4.3.5 und 4.3.6, künstlich unterteilten Blöcken zuzugreifen.

Definition 4.3.59 (Komponentenabbildungen). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim$ zwei Clusterrelationen sowie \sim die zugehörige Blockrelation. Seien weiter $b' = (t', s')$, $b = (t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und sei $\mathcal{T}_{(b', b), \sim}$ der Auswertungsbaum für (b', b) bzgl. \sim , dann definieren wir die Komponentenabbildungen

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}[\mathcal{T}_{(b', b), \sim}] &: \text{sons}^*(b) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}) \\ \text{und } \Pi_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}[\mathcal{T}_{(b', b), \sim}] &: \text{sons}^*(b) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{T}_{\mathcal{J}}) \end{aligned}$$

durch

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}[\mathcal{T}_{(b', b), \sim}](b^*) &:= \{t'^* \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \mid \exists (b', (t'^*, s'^*), b^*) \in \mathcal{L}^-_{(b', b), \sim}\} \\ \text{und } \Pi_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}[\mathcal{T}_{(b', b), \sim}](b^*) &:= \{s'^* \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \mid \exists (b', (t'^*, s'^*), b^*) \in \mathcal{L}^-_{(b', b), \sim}\} \end{aligned}$$

für alle $b^* \in \text{sons}^*(b)$.

Für ein Blatt $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie $b \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b') \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ beschreiben die oben definierten Komponentenabbildungen gerade die künstlichen Nachfahren von b' , die am Ende der

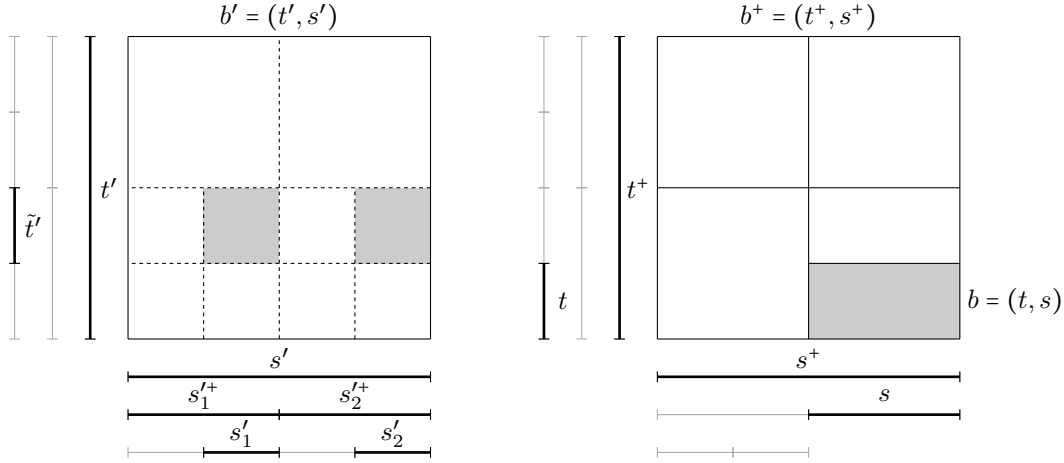


Abbildung 4.19: Cluster $s'^+_1 \in \text{pred}(s'_1)$ und $s'^+_2 \in \text{pred}(s'_2)$ mit $(s'^+_1, s), (s'^+_2, s) \in \mathcal{L}^-_{s', s, \asymp_B}$, wobei $(b', (\tilde{t}', s'_1), b), (b', (\tilde{t}', s'_2), b) \in \mathcal{L}^-_{(b', b^+), \asymp_{(A, B)}}$ gilt.

Rekursion von Algorithmus 4.3.5 entstehen. Anhand dieser Cluster wird dort entschieden, ob ein Blatt $b^* \in \text{sons}^*(b) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ zu der unzulässigen Blockzeile $\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b')$ hinzugefügt wird oder nicht.

Wir werden nun mit dem nachstehenden Lemma beweisen, dass die oben exemplarisch dargestellte Vorgehensweise genau die unzulässigen Blätter eines benötigten Assemblierungsbaums *lokalisiert* und anschließend Algorithmen angeben, die diese Blätter konstruieren.

Lemma 4.3.60 (Blattlokalisierung). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ und $\tau_{\mathcal{J}} \sim$ zwei vererbte Clusterrelationen sowie \sim die zugehörige Blockrelation. Seien weiter $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $(b', b) \in \mathcal{L}_{\sim}^-$ und $(p, q, \mathcal{K}) \in \{(t', t, \mathcal{I}), (s', s, \mathcal{J})\}$.*

- (a) *Gilt $\text{level}(p) < \text{level}(q)$ mit $p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{K}}$, dann existiert ein $b^+ \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b')$ und es gilt $(p^*, q) \in \mathcal{L}^-_{p, q, \tau_{\mathcal{K}} \sim}$ genau dann, wenn ein $p^{**} \in \Pi_{\mathcal{T}_{\mathcal{K}}}[\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}](b)$ mit $p^* \in \text{pred}(p^{**})$ sowie*

$$\text{level}(p^*) < \text{level}(q) \text{ und } p^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{K}} \quad \text{oder} \quad \text{level}(p^*) = \text{level}(q)$$

existiert.

- (b) *Gilt $\text{level}(p) > \text{level}(q)$ mit $q \notin \mathcal{L}_{\mathcal{K}}$, dann existiert ein $b'^+ \in \text{col}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b)$ und es gilt $(q^*, p) \in \mathcal{L}^-_{q, p, \tau_{\mathcal{K}} \sim^T}$ genau dann, wenn ein $q^{**} \in \Pi_{\mathcal{T}_{\mathcal{K}}}[\mathcal{T}_{(b, b'^+), \sim^T}](b')$ mit $q^* \in \text{pred}(q^{**})$ sowie*

$$\text{level}(p) > \text{level}(q^*) \text{ und } q^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{K}} \quad \text{oder} \quad \text{level}(p) = \text{level}(q^*)$$

existiert.

Beweis. (a) Wir beschränken uns im Folgenden auf den Fall $(p, q, \mathcal{K}) = (t', t, \mathcal{I})$. Da keine besonderen Eigenschaften von $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ oder $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ — im Vergleich zu $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ bzw. $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim$ — für die Beweisführung erforderlich sind, folgt der Fall $(p, q, \mathcal{K}) = (s', s, \mathcal{J})$ auf analoge Weise.

Es gelte also $\text{level}(t') < \text{level}(t)$ mit $t' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, dann folgt mit Kontraposition aus Lemma 3.2.6

$$\text{level}(b') \stackrel{3.2.6}{=} \text{level}(t') < \text{level}(t) \leq \text{level}(b). \quad (4.72)$$

Es existiert somit ein $b^+ \in \text{pred}(b)$ mit $\text{level}(b') = \text{level}(b^+)$ und aus $(b', b) \in \mathcal{L}_{\sim}^-$ folgt $b' \sim b$, was mit der Vererbbarkeit von \sim (siehe Lemma 4.2.16) $b' \sim b^+$ bedeutet. Nach dem Charakterisierungslemma 4.2.22 gilt dann $(b', b^+) \in \mathcal{T}_{\sim}^-$, also $b^+ \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b')$.

Wir zeigen nun die zu beweisende Äquivalenz.

„ \Leftarrow “: Seien $t'^{**} \in \Pi_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}[\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}](b)$ und $t'^* \in \text{pred}(t'^{**})$ mit

$$\text{level}(t'^*) < \text{level}(t) \text{ und } t'^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \quad \text{oder} \quad \text{level}(t'^*) = \text{level}(t). \quad (4.73)$$

Aus $t'^{**} \in \Pi_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}[\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}](b)$ folgt nach Definition 4.3.59 die Existenz eines Elements $(b', (t'^{**}, s'^{**}), b) \in \mathcal{L}_{(b', b^+), \sim}^-$. Da dieses Element unzulässig in $\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}$ ist, folgt mit $b = (t, s)$ insbesondere $t \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim, t'^{**})$ (vgl. Definition 4.3.14), also $t'^{**} \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t$. Mit $t'^* \in \text{pred}(t'^{**})$ gilt nach Vererbbarkeit von $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ auch $t'^* \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t$, was zusammen mit (4.73) nach dem Charakterisierungslemma 4.2.22

$$(t'^*, t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim^- \quad (4.74)$$

bedeutet. Es gilt also nach (4.73) sowie (4.74)

$$\text{level}(t'^*) \leq \text{level}(t) \quad \text{und} \quad (t'^*, t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim^-.$$

Wir zeigen nun $t'^* \in \text{sons}^*(t')$, womit dann $(t'^*, t) \in \text{sons}^*(t') \times \{t\}$ und damit nach der Charakterisierung aller unzulässigen Blätter eines Assemblierungsbaums durch Korollar 4.3.38 die Aussage folgt.

Da $(b', (t'^{**}, s'^{**}), b) \in \mathcal{L}_{(b', b^+), \sim}^- \subseteq \mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}$ gilt, existiert ein Pfad

$$((b'_0, (t'_0, s'_0), b_0), \dots, (b'_n, (t'_n, s'_n), b_n))$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ von $\text{root}(\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}) = (b', (t', s'), b^+)$ nach $(b', (t'^{**}, s'^{**}), b)$ in $\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}$. Es gilt dann

$$(b'_i, (t'_i, s'_i), b_i) \in \{b'_{i-1}\} \times (\text{sons}^+(t'_{i-1}) \times \text{sons}^+(s'_{i-1})) \times \text{sons}(b_{i-1})$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, womit (t'_0, \dots, t'_n) ein erweiterter Pfad von t' nach t'^{**} in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ist. Damit folgt $t' \in \text{pred}(t'^{**})$, was zusammen mit der Voraussetzung $t'^* \in \text{pred}(t'^{**})$

$$t'^* \in \text{sons}^*(t') \quad \text{oder} \quad t'^* \in \text{pred}(t') \quad (4.75)$$

bedeutet. Angenommen es gilt $t'^* \in \text{pred}(t')$, dann folgt $t' \in \text{sons}^*(t'^*)$ und mit $t' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ (siehe Voraussetzung) auch $t'^* \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$. Des Weiteren gilt nach Voraussetzung $\text{level}(t') < \text{level}(t)$, also

$$\text{level}(t'^*) \leq \text{level}(t') < \text{level}(t),$$

womit — zusammen mit $t'^* \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ — das Charakterisierungslemma 4.2.22 $(t'^*, t) \notin \mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}^-$ liefert. Dies steht im Widerspruch zu (4.74), womit der zweite Fall in (4.75) nicht gelten kann und $t'^* \in \text{sons}^*(t')$ folgt. Es gilt also $(t'^*, t) \in \text{sons}^*(t') \times \{t\}$ mit $\text{level}(t'^*) \leq \text{level}(t)$ und $(t'^*, t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}^-$, was nach Korollar 4.3.38 $(t'^*, t) \in \mathcal{L}_{t', t, \mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}}^-$ bedeutet. Die Voraussetzung $t' \mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim} t$ des Korollars 4.3.38 ist erfüllt, da $b' \sim b$ gilt.

„ \Rightarrow “: Sei $(t'^*, t) \in \mathcal{L}_{t', t, \mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}}^-$, dann folgt — wieder mit $t' \mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim} t$ aus $b' \sim b$ — nach Korollar 4.3.38

$$(t'^*, t) \in \text{sons}^*(t') \times \{t\} \quad \text{mit} \quad \text{level}(t'^*) \leq \text{level}(t) \quad \text{und} \quad (t'^*, t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}^-. \quad (4.76)$$

Laut dem Charakterisierungslemma 4.2.22 können also nur

$$\text{level}(t'^*) < \text{level}(t) \text{ mit } t'^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \quad \text{oder} \quad \text{level}(t'^*) = \text{level}(t)$$

gelten. Es bleibt somit lediglich die Existenz eines $t'^{**} \in \Pi_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}[\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}](b)$ mit $t'^* \in \text{pred}(t'^{**})$ zu zeigen.

Da nach Voraussetzung $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $(b', b) \in \mathcal{L}_{\sim}^- \subseteq \mathcal{T}_{\sim}^-$ gilt, folgt mit $b^+ \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b')$ und $\text{level}(b') < \text{level}(b)$ (vgl. (4.72)) nach Lemma 4.3.16 die Existenz eines $(b', (\tilde{t}', \tilde{s}'), b) \in \mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}^-$, was mit $\text{sons}(b) = \emptyset$ insbesondere

$$(b', (\tilde{t}', \tilde{s}'), b) \in \mathcal{L}_{(b', b^+), \sim}^- \quad (4.77)$$

bedeutet.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Aussage aus Lemma 4.3.16 nur die Existenz eines dort nicht näher spezifizierten $\tilde{b}^+ \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b')$ sicherstellt. Dieses \tilde{b}^+ entspricht aber gerade dem Vorfahren von b , der sich auf dem gleichen Level wie b' befindet — vgl. Bemerkung 4.3.17 —, womit $\tilde{b}^+ = b^+$ folgt.

Es existiert nun ein Pfad

$$((b'_0, (\tilde{t}'_0, \tilde{s}'_0), b_0), \dots, (b'_n, (\tilde{t}'_n, \tilde{s}'_n), b_n)) \quad (4.78)$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ von $\text{root}(\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}) = (b', (t', s'), b^+)$ nach $(b', (\tilde{t}', \tilde{s}'), b)$ in $\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}$. Es gilt also wieder — wie im Beweis der vorherigen Implikation — nach Konstruktion der Söhne

$$(b'_i, (\tilde{t}'_i, \tilde{s}'_i), b_i) \in \{b'_{i-1}\} \times (\text{sons}^+(\tilde{t}'_{i-1}) \times \text{sons}^+(\tilde{s}'_{i-1})) \times \text{sons}(b_{i-1}) \quad (4.79)$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, womit

$$(\tilde{t}'_0, \dots, \tilde{t}'_n) \quad (4.80)$$

ein erweiterter Pfad von t' nach \tilde{t}' in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ist.

Wir werden nun einen erweiterten Pfad (t'_0, \dots, t'_n) von t' zu einem Element $t'_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ konstruieren, mit diesem den erweiterten Pfad aus (4.80) in (4.78) ersetzen und zeigen, dass wir so ein Element aus $\mathcal{L}_{(b', b^+), \sim}^-$ mit den gewünschten Eigenschaften erhalten. Diese Idee ist in Abbildung 4.20 noch einmal exemplarisch dargestellt. Dort gelte $(t'_2, t) \in \mathcal{L}_{t', t, \mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}}^-$ — also $t'_2 = t'^*$ — und es wird der erweiterte Pfad $(\tilde{t}'_0, \dots, \tilde{t}'_3)$ durch den noch zu konstruierenden erweiterten Pfad (t'_0, \dots, t'_3) ausgetauscht.

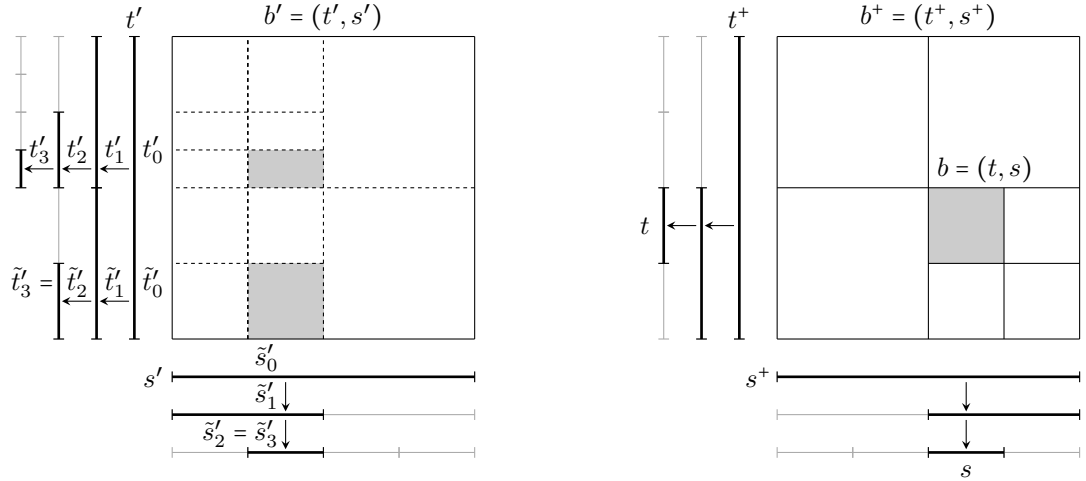


Abbildung 4.20: Verdeutlichung der Idee aus dem Beweis von Lemma 4.3.60. Es wird ein erweiterter Pfad (t'_0, \dots, t'_3) konstruiert, der über den Cluster t'_2 des unzulässigen Blatts $(t'_2, t) \in \mathcal{L}_{t', t, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}^-$ verläuft. Dieser ersetzt dann den erweiterten Pfad $(\tilde{t}'_0, \dots, \tilde{t}'_3)$ womit $t'_3 \in \Pi_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}[\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}](b)$ sowie $t'_2 \in \text{pred}(t'_3)$ gelten.

Als ersten Schritt zeigen wir die Existenz eines Pfads (t'_0, \dots, t'_{n_1}) , $n_1 \in \mathbb{N}_0$, von t' nach t^* in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, für den $t'_i \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t$ für alle $i \in \{0, \dots, n_1\}$ gilt.

Mit $(t^*, t) \in \mathcal{L}_{t', t, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}^- \subseteq \mathcal{T}_{t', t, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}^-$ existiert ein Pfad

$$((t'_0, t_0), \dots, (t'_{n_1}, t_{n_1}))$$

mit $n_1 \in \mathbb{N}_0$ von $\text{root}(\mathcal{T}_{t', t, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}^-) = (t', t)$ nach (t^*, t) in dem Assemblierungsbaum $\mathcal{T}_{t', t, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}^-$. Es gilt also

$$(t'_i, t_i) \in \text{sons}_{\mathcal{A}}((t'_{i-1}, t_{i-1})) \neq \emptyset$$

für alle $i \in \{1, \dots, n_1\}$, womit

$$(t'_i, t_i) \in \text{sons}(t'_{i-1}) \times \{t_{i-1}\} \quad (4.81)$$

für alle $i \in \{1, \dots, n_1\}$ folgt. Damit ist

$$(t'_0, \dots, t'_{n_1}) \quad (4.82)$$

ein Pfad von t' nach t^* in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$. Aus der Unzulässigkeit aller (t'_i, t_i) in $\mathcal{T}_{t', t, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}^-$ für $i \in \{0, \dots, n_1 - 1\}$ — diese Blöcke besitzen Söhne — sowie $(t'_{n_1}, t_{n_1}) = (t^*, t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}^-$ (vgl. (4.76)) folgt

$$t'_i \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t \quad (4.83)$$

für alle $i \in \{0, \dots, n_1\}$.

Als zweiten Schritt werden wir nun den Pfad (t'_0, \dots, t'_{n_1}) aus (4.82) zu einem erweiterten Pfad (t'_0, \dots, t'_n) (mit n aus (4.78)) so verlängern, dass auch $t'_i \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t$ für alle $i \in \{n_1 + 1, \dots, n\}$ gilt. Hierzu zeigen wir zuerst $n_1 \leq n$.

Mit dem Pfad aus (4.78) und der Definition der Söhne in (4.79) ist (b_0, \dots, b_n) ein Pfad von b^+ nach b . Aus $b^+ \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b')$ folgt $\text{level}(b') = \text{level}(b^+)$, also

$$\text{level}(b) - \text{level}(b') = \text{level}(b) - \text{level}(b^+) = n.$$

Nach Voraussetzung gilt $t' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, was nach Kontraposition von Lemma 3.2.6 $\text{level}(b') = \text{level}(t')$ bedeutet. Zusammen mit $\text{level}(t'^*) \leq \text{level}(t)$ (siehe (4.76)) und $n_1 = \text{level}(t'_{n_1}) - \text{level}(t'_0) = \text{level}(t'^*) - \text{level}(t')$ folgt

$$\begin{aligned} n_1 &= \text{level}(t'^*) - \text{level}(t') \leq \text{level}(t) - \text{level}(t') \\ &= \text{level}(t) - \text{level}(b') \leq \text{level}(b) - \text{level}(b') = n. \end{aligned}$$

Wir verlängern nun den Pfad (4.82) induktiv zu einem erweiterten Pfad der Länge n und werden bei dieser Konstruktion unter Verwendung der Vererbbarkeit von $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ dafür sorgen, dass alle weiteren Cluster des Pfades ebenfalls in Relation mit dem Cluster t stehen (vgl. (4.83)). Wir zeigen also für alle $i \in \{n_1 + 1, \dots, n\}$ die Existenz von $t'_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $t'_i \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t$ und $t'_i \in \text{sons}^+(t'_{i-1})$. Der Cluster t'_{n_1} entspricht hierbei gerade dem Ende des Pfades aus (4.82).

Aus (4.83) ergibt sich $t'_{n_1} \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t$, womit nach Vererbbarkeit von $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ ein $t'^*_{n_1} \in \text{sons}^+(t'_{n_1})$ mit $t'^*_{n_1} \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t$ existiert. Indem wir $t'_{n_1+1} := t'^*_{n_1}$ setzen, folgt die Aussage für $n_1 + 1$.

Sei $i \in \{n_1 + 1, \dots, n - 1\}$ so gewählt, dass ein $t'_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $t'_i \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t$ sowie $t'_i \in \text{sons}^+(t'_{i-1})$ existiert.

Mit der Vererbbarkeit von $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ existiert auch hier ein $t'^*_i \in \text{sons}^+(t'_i)$ mit $t'^*_i \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t$, womit die Induktion durch Setzen von $t'_{i+1} := t'^*_i$ vollständig ist.

Wir haben nun also einen erweiterten Pfad $(t'_0, \dots, t'_n) = (t'_0, \dots, t'_{n_1}, \dots, t'_n)$ von t' nach $t'_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ konstruiert, für den $t'_{n_1} = t'^*$ sowie $t'_i \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t$ für alle $i \in \{0, \dots, n\}$ gilt. Um besser kenntlich zu machen, wie und wo wir diesen Pfad nun verwenden, schreiben wir für (t'_0, \dots, t'_n) im Folgenden auch $(\mathbf{t}'_0, \dots, \mathbf{t}'_n)$. Es ist also

$$(t'_0, \dots, t'_n) = (\mathbf{t}'_0, \dots, \mathbf{t}'_{n_1}, \dots, \mathbf{t}'_n) \quad (4.84)$$

ein Pfad von t' nach $\mathbf{t}'_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $\mathbf{t}'_{n_1} = t'^*$ sowie

$$\mathbf{t}'_i \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim t \text{ für alle } i \in \{0, \dots, n\}. \quad (4.85)$$

Wir ersetzen nun $(\tilde{t}'_0, \dots, \tilde{t}'_n)$ in (4.78) durch $(\mathbf{t}'_0, \dots, \mathbf{t}'_n)$ und zeigen, dass

$$((b'_0, (\mathbf{t}'_0, \tilde{s}'_0), b_0), \dots, (b'_n, (\mathbf{t}'_n, \tilde{s}'_n), b_n))$$

ein Pfad von $\text{root}(\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}) = (b', (t', s'), b^+)$ nach $(b', (\mathbf{t}'_n, \tilde{s}'), b)$ in $\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}$ ist sowie $(b', (\mathbf{t}'_n, \tilde{s}'), b) \in \mathcal{L}^-_{(b', b^+), \sim}$ gilt. Durch Setzen von $t'^{**} := \mathbf{t}'_n$ folgt dann

$$t'^{**} \in \Pi_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}[\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}](b) \quad \text{und} \quad t'^* = \mathbf{t}'_{n_1} \in \text{pred}(\mathbf{t}'_n) = \text{pred}(t'^{**}),$$

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

also die gewünschte Aussage.

Da (4.78) einen Pfad darstellt und (4.84) ein erweiterter Pfad ist, gilt

$$(b'_i, (\mathbf{t}'_i, \tilde{s}'_i), b_i) \in \{b'_{i-1}\} \times (\text{sons}^+(\mathbf{t}'_{i-1}) \times \text{sons}^+(\tilde{s}'_{i-1})) \times \text{sons}(b_{i-1})$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, womit insbesondere $(b_0 = (t_0, s_0), \dots, b_n = (t_n, s_n))$ einen Pfad von b^+ nach $b = (t, s)$ in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ definiert.

Wir zeigen nun $(b'_i, (\mathbf{t}'_i, \tilde{s}'_i), b_i) \in \mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}^-$ für alle $i \in \{0, \dots, n\}$ per Induktion.

Es gilt $(b'_0, (\mathbf{t}'_0, \tilde{s}'_0), b_0) = (b', (t', s'), b^+) = \text{root}(\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim})$. Gilt $n = 0$, dann folgt $(b', (t', s'), b^+) = (b', (t', s'), b) \in \mathcal{L}_{(b', b^+), \sim}^- \subseteq \mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}^-$ — man beachte, dass $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ nach Voraussetzung gilt. Für $n \neq 0$ muss $(b', (t', s'), b^+)$ unzulässig sein, da dieses Element Söhne besitzt. Es folgt also auch in diesem Fall $(b', (t', s'), b^+) \in \mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}^-$ und damit die Aussage für $i = 0$.

Sei nun $i \in \{0, \dots, n-1\}$ und es gelte $(b'_i, (\mathbf{t}'_i, \tilde{s}'_i), b_i) \in \mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}^-$, dann gilt mit $b_i = (t_i, s_i)$ nach Definition der Unzulässigkeit in $\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}$ (vgl. Definition 4.3.14)

$$t_i \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, \mathbf{t}'_i) \quad \text{und} \quad s_i \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}, \tilde{s}'_i),$$

also insbesondere $(\mathbf{t}'_i, t_i) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}^-$. Wir zeigen nun

$$t_{i+1} \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, \mathbf{t}'_{i+1}) \quad \text{und} \quad s_{i+1} \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}, \tilde{s}'_{i+1}),$$

womit sich dann $(b'_{i+1}, (\mathbf{t}'_{i+1}, \tilde{s}'_{i+1}), b_{i+1}) \in \mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}^-$ ergibt und die Induktion vollständig ist.

Wir betrachten zuerst $(\mathbf{t}'_{i+1}, t_{i+1})$. Gilt $\text{sons}((\mathbf{t}'_i, t_i)) = \emptyset$, so folgt $(\mathbf{t}'_{i+1}, t_{i+1}) = (\mathbf{t}'_i, t_i) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}^-$ aus der Unzulässigkeit in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}$ — beide Cluster müssen Blätter in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ sein und es gilt $\mathbf{t}'_{i+1} \in \text{sons}^+(\mathbf{t}'_i)$ sowie $t_{i+1} \in \text{sons}^+(t_i)$. Es gilt also $t_{i+1} \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, \mathbf{t}'_{i+1})$. Gilt $\emptyset \neq \text{sons}((\mathbf{t}'_i, t_i)) = \text{sons}^+(\mathbf{t}'_i) \times \text{sons}^+(t_i)$, so folgt $(\mathbf{t}'_{i+1}, t_{i+1}) \in \text{sons}((\mathbf{t}'_i, t_i))$. Da $(b_0 = (t_0, s_0), \dots, b_n = (t_n, s_n))$ ein Pfad von b^+ nach b in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ definiert, ist (t_0, \dots, t_n) ein erweiterter Pfad von $t_0 = t^+$ nach $t_n = t$. Es gilt also $t_{i+1} \in \text{pred}(t)$ und aus $\mathbf{t}'_{i+1} \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim} t$ (vgl. (4.85)) folgt $\mathbf{t}'_{i+1} \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim} t_{i+1}$ nach Vererbbarkeit von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}$ (vgl. Lemma 4.2.12). Damit ist $(\mathbf{t}'_{i+1}, t_{i+1})$ in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}$ unzulässig, was $(\mathbf{t}'_{i+1}, t_{i+1}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}^-$ und somit $t_{i+1} \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, \mathbf{t}'_{i+1})$ bedeutet.

Mit der Pfadeigenschaft von (4.78) — alle Elemente des Pfads (bis auf das letzte) sind unzulässig in $\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}$ — und $(b'_n, (\tilde{t}'_n, \tilde{s}'_n), b_n) \in \mathcal{L}_{(b', b^+), \sim}^-$ folgt außerdem $s_{i+1} \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}, \tilde{s}'_{i+1})$, womit $b'_{i+1} \in \{b'_i\}$ und $b_{i+1} \in \text{sons}(b_i)$

$$(b'_{i+1}, (\mathbf{t}'_{i+1}, \tilde{s}'_{i+1}), b_{i+1}) \in \mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}^-$$

liefern.

Die Induktion ist damit vollständig und $\text{sons}(b_n) = \text{sons}(b) = \emptyset$ sowie $b'_n = b'$ führt auf

$$(b', (\mathbf{t}'_n, \tilde{s}'_n), b) \in \mathcal{L}_{(b', b^+), \sim}^-.$$

Mit $t'^{**} := \mathbf{t}'_n$ gilt also $t'^{**} \in \Pi_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}[\mathcal{T}_{(b',b^+),\sim}](b)$ und nach (4.84) auch

$$t'^{*} = \mathbf{t}'_{n_1} \in \text{pred}(\mathbf{t}'_n) = \text{pred}(t'^{**}).$$

Wie zu Beginn dieses Beweises erwähnt, lässt sich die hier vorgestellte Konstruktion eines geeigneten Elements aus $\mathcal{L}_{(b',b^+),\sim}^-$, angewendet auf $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}\sim$, im Fall von $(p, q, \mathcal{K}) = (s', s, \mathcal{J})$ analog durchführen.

(b) Es gelte $\text{level}(p) > \text{level}(q)$ mit $q \notin \mathcal{L}_{\mathcal{K}}$. Aus $(b', b) \in \mathcal{L}_{\sim}^-$ folgt mit der Darstellung des transponierten Relationsbaums über die transponierte Relation (siehe Lemma 4.2.28) $(b, b') \in \mathcal{L}_{\sim^T}^-$. Nach Teil (a) dieses Lemmas — angewendet auf die transponierte Blockrelation \sim^T sowie die dieser zugrundeliegenden transponierten Clusterrelationen $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\sim^T$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}\sim^T$ (vgl. Korollar 4.2.27) — existiert ein $b'^+ \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim^T}, b)$ und es gilt $(q^*, p) \in \mathcal{L}_{q,p,\mathcal{T}_{\mathcal{K}}\sim^T}^-$ genau dann, wenn ein $q^{**} \in \Pi_{\mathcal{T}_{\mathcal{K}}}[\mathcal{T}_{(b,b'^+),\sim^T}](b')$ mit $q^* \in \text{pred}(q^{**})$ und

$$\text{level}(q^*) < \text{level}(p) \text{ mit } q^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{K}} \quad \text{oder} \quad \text{level}(q^*) = \text{level}(p)$$

existiert. Aus $\text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim^T}, b) = \text{col}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b)$ (siehe Korollar 3.4.5) folgt die Aussage. \square

Die Aussage des Lemmas 4.3.60 ist konstruktiver Natur. Wir können daraus also direkt Algorithmen ableiten, die alle unzulässigen Blätter benötigter Assemblierungsbäume simultan zur Bestimmung der Menge \mathcal{L}_{\sim}^- aufstellen.

Wir betrachten den Fall $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $(b', b) \in \mathcal{L}_{\sim}^-$, $\text{level}(t') < \text{level}(t)$ sowie $t' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und sind an der Lokalisierung eines Blatts $(t'^*, t) \in \mathcal{L}_{t',t,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\sim}^-$ interessiert. Nach Lemma 4.3.60 (a) folgt in diesem Fall die Existenz eines Blocks $b^+ \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b')$ und eines Clusters

$$t'^{**} \in \Pi_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}[\mathcal{T}_{(b',b^+),\sim}](b) \quad \text{mit} \quad t'^{*} \in \text{pred}(t'^{**})$$

sowie

$$\text{level}(t'^{*}) < \text{level}(t) \text{ mit } t'^{*} \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \quad \text{oder} \quad \text{level}(t'^{*}) = \text{level}(t). \quad (4.86)$$

Gilt der erste Fall aus (4.86), also $\text{level}(t'^{*}) < \text{level}(t)$ mit $t'^{*} \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, so folgt aus $t'^{*} \in \text{pred}(t'^{**})$ insbesondere $t'^{**} = t'^{*}$. Wir brauchen also nicht zu den Vorfahren von t'^{**} überzugehen, da t'^{**} bereits dem gesuchten Cluster entspricht. Es liegt somit eine Situation aus Abbildung 4.21 vor.

Für den zweiten Fall aus (4.86) — also $\text{level}(t'^{*}) = \text{level}(t)$ — könnte potentiell eine Situation aus Abbildung 4.22 auftreten. Dort müssen wir dann so lange sukzessive zu den Vorfahren von t'^{**} übergehen, bis wir den Cluster t'^{*} erreichen.

Dieses Vorgehen bildet der Algorithmus 4.3.17 ab, welcher $(t'^*, t) \in \mathcal{L}_{t',t,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\sim}^-$ in dem hier beschriebenen Beispiel entweder direkt in Form von t'^{**} — erster Fall aus (4.86) — oder über die Vorfahren von t'^{**} — zweiter Fall aus (4.86) — der Menge $\mathcal{L}_{t',t,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\sim}^-$ hinzufügt.

Die beiden Algorithmen 4.3.19 und 4.3.20 sind Erweiterungen der Algorithmen 4.3.5 bzw. 4.3.6 und stellen neben der Menge \mathcal{L}_{\sim}^- alle Informationen zur Konstruktion benötigter Assemblierungsbäume auf. Diese Informationen bestehen neben der Wurzel aus

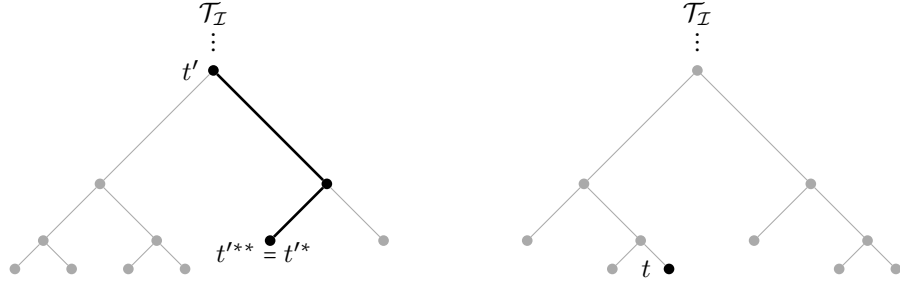


Abbildung 4.21: Veranschaulichung des ersten Falls aus (4.86). Hier kann $(t^*, t) = (t^{**}, t)$ direkt zu der Menge $\mathcal{L}_{t', t, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}^-$ hinzugefügt werden.

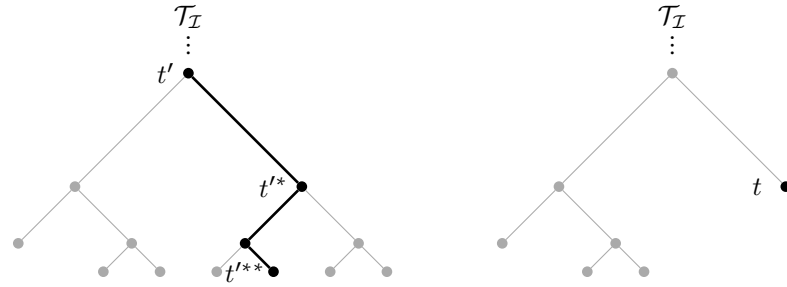


Abbildung 4.22: Veranschaulichung des zweiten Falls aus (4.86). Hier muss zuerst über $\text{pred}(t^{**})$ zu dem Cluster t^* übergegangen werden, bevor (t^*, t) der Menge $\mathcal{L}_{t', t, \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}^-$ hinzugefügt werden kann.

allen unzulässigen Blättern des entsprechenden Baums. Beide Algorithmen bedienen sich der Funktion `ADD_INADMISSIBLE_LEAF_ASSEMBLETREE` aus Algorithmus 4.3.17 zur Lokalisierung unzulässiger Blätter nach Lemma 4.3.60. Der Algorithmus 4.3.18 ersetzt den Algorithmus 4.3.4 und bestimmt simultan zu der Menge \mathcal{L}_{\sim}^- die Wurzeln sowie alle unzulässigen Blätter benötigter Assemblierungsbäume.

Algorithmus 4.3.17 Aktualisierung der Menge $\mathcal{L}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}^-$ eines Assemblierungsbaums im Fall von $\text{level}(p) < \text{level}(q)$ mit $p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ über die Vorfahren von $p^{**} \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$.

```

procedure ADD_INADMISSIBLE_LEAF_ASSEMBLETREE( $\mathcal{L}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}^-$ ,  $p^{**}$ ,  $q$ )
   $p^* \leftarrow p^{**}$ 
  while  $\text{level}(p^*) > \text{level}(q)$  do
     $p^* \leftarrow \text{father}(p^*)$ 
  end while
   $\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}, p^*) \leftarrow \text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}, p^*) \cup \{q\}$ 
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Der Aufruf dieser Funktion geschieht aus den Algorithmen 4.3.19 und 4.3.20. Es wird solange sukzessive zu den Vorfahren von p^{**} übergegangen, bis ein Element $p^* \in \text{pred}(p^{**})$ mit $\text{level}(p^*) \leq \text{level}(q)$ erreicht ist und dann die Menge $\mathcal{L}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}^-$ in Form von $\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}, p^*) \cup \{q\}$ aktualisiert. Dieses Vorgehen basiert auf den Aussagen des Lemmas 4.3.60.

Algorithmus 4.3.18 Aufstellen der Menge \mathcal{L}_{\sim}^- bei gleichzeitiger Konstruktion aller Wurzeln und unzulässigen Blätter benötigter Assemblierungsbäume.

```

procedure INADMISSIBLE_LEAF_ASSEMBLETREE( $b', b$ )
  ( $t', s'$ )  $\leftarrow b', (t, s) \leftarrow b$ 
  if  $t \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I}\sim}, t')$  and  $s \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{J}\sim}, s')$  then
    if  $\text{sons}(b') = \emptyset = \text{sons}(b)$  then
       $\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b') \leftarrow \text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b') \cup \{b\}$ 
    else if  $\text{sons}(b') = \emptyset$  then
      INADMISSIBLE_ROW_LEAF_ASSEMBLETREE( $b', (t', s'), b$ )
      ▷ Algorithmus 4.3.19
    else if  $\text{sons}(b) = \emptyset$  then
      INADMISSIBLE_COL_LEAF_ASSEMBLETREE( $b, (t, s), b'$ )
      ▷ Algorithmus 4.3.20
    else
      for all  $(b'^*, b^*) \in \text{sons}(b') \times \text{sons}(b)$  do
        INADMISSIBLE_LEAF_ASSEMBLETREE( $b'^*, b^*$ )
      end for
    end if
  end if
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Der initiale Aufruf geschieht mit der Wurzel von \mathcal{T}_{\sim} , also

$$\text{root}(\mathcal{T}_{\sim}) = (\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}), \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}})).$$

Es werden neben der Menge \mathcal{L}_{\sim}^- zusätzlich die Wurzeln sowie alle unzulässigen Blätter benötigter Assemblierungsbäume aufgestellt. Für eine detailliertere Beschreibung der hier verwendeten Vorgehensweise zur Konstruktion von \mathcal{L}_{\sim}^- sei auf die Algorithmusbeschreibung von Algorithmus 4.3.4 verwiesen. Die dort verwendeten Algorithmen 4.3.5 und 4.3.6 werden hier durch die Algorithmen 4.3.19 und 4.3.20 ersetzt, welche zusätzlich zu der Menge \mathcal{L}_{\sim}^- die Wurzeln sowie alle unzulässigen Blätter benötigter Assemblierungsbäume aufstellen.

Algorithmus 4.3.19 Aktualisierung der Menge \mathcal{L}_{\sim}^- für $b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ bei gleichzeitiger Konstruktion aller Wurzeln und unzulässigen Blätter benötigter Assemblierungsbäume.

```

procedure INADMISSIBLE_ROW_LEAF_ASSEMBLETREE( $b', (t'^*, s'^*), b^*$ )
   $(t^*, s^*) \leftarrow b^*$ 
  if  $t^* \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, t'^*)$  and  $s^* \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}, s'^*)$  then
    if  $\text{sons}(b^*) = \emptyset$  then
       $\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b') \leftarrow \text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b') \cup \{b^*\}$ 
      if  $\text{level}(t') < \text{level}(t^*)$  and  $t' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$  then
         $\text{root}(\mathcal{T}_{t', t^*, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}}) \leftarrow (t', t^*)$ 
         $\text{ADD\_INADMISSIBLE\_LEAF\_ASSEMBLETREE}(\mathcal{L}_{t', t^*, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}}^-, t'^*, t^*)$ 
        ▷ Algorithmus 4.3.17
      end if
      if  $\text{level}(s') < \text{level}(s^*)$  and  $s' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$  then
         $\text{root}(\mathcal{T}_{s', s^*, \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}}) \leftarrow (s', s^*)$ 
         $\text{ADD\_INADMISSIBLE\_LEAF\_ASSEMBLETREE}(\mathcal{L}_{s', s^*, \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}}^-, s'^*, s^*)$ 
        ▷ Algorithmus 4.3.17
      end if
    else
      for all  $((t'^{**}, s'^{**}), b^{**}) \in (\text{sons}^+(t'^*) \times \text{sons}^+(s'^*)) \times \text{sons}(b^*)$  do
         $\text{INADMISSIBLE\_ROW\_LEAF\_ASSEMBLETREE}(b', (t'^{**}, s'^{**}), b^{**})$ 
      end for
    end if
  end if
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Der Aufruf dieses Algorithmus geschieht aus Algorithmus 4.3.18. Für die Beschreibung des hier verwendeten Grundprinzips sei auf die Algorithmusbeschreibung von Algorithmus 4.3.5 verwiesen.

Ist neben $b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ auch der Block $b^* = (t^*, s^*) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blatt, wird im Fall von $\text{level}(t') < \text{level}(t^*)$ mit $t' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ die Wurzel des Assemblierungsbaums $\mathcal{T}_{t', t^*, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}}$ belegt und mit der Funktion $\text{ADD_INADMISSIBLE_LEAF_ASSEMBLETREE}$ über die Vorfahren von t'^* das zugehörige unzulässige Blatt dieses Baums abgespeichert (vgl. Lemma 4.3.60). Analog geschieht dies für die Spaltencluster im Fall von $\text{level}(s') < \text{level}(s^*)$ mit $s' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$.

Algorithmus 4.3.20 Aktualisierung der Menge \mathcal{L}_{\sim}^- für $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ bei gleichzeitiger Konstruktion aller Wurzeln und unzulässigen Blätter benötigter Assemblierungsbäume.

```

procedure INADMISSIBLE_COL_LEAF_ASSEMBLETREE( $b, (t^*, s^*), b'^*$ )
   $(t'^*, s'^*) \leftarrow b'^*$ 
  if  $t^* \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}, t'^*)$  and  $s^* \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}, s'^*)$  then
    if  $\text{sons}(b'^*) = \emptyset$  then
       $\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b'^*) \leftarrow \text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\sim}, b'^*) \cup \{b\}$ 
      if  $\text{level}(t'^*) > \text{level}(t)$  and  $t \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$  then
         $\text{root}(\mathcal{T}_{t, t'^*, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}^T}) \leftarrow (t, t'^*)$ 
         $\text{ADD\_INADMISSIBLE\_LEAF\_ASSEMBLETREE}(\mathcal{L}_{t, t'^*, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}^T}^-, t^*, t'^*)$ 
        ▷ Algorithmus 4.3.17
      end if
      if  $\text{level}(s'^*) > \text{level}(s)$  and  $s \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$  then
         $\text{root}(\mathcal{T}_{s, s'^*, \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}^T}) \leftarrow (s, s'^*)$ 
         $\text{ADD\_INADMISSIBLE\_LEAF\_ASSEMBLETREE}(\mathcal{L}_{s, s'^*, \mathcal{T}_{\mathcal{J} \sim}^T}^-, s^*, s'^*)$ 
        ▷ Algorithmus 4.3.17
      end if
    else
      for all  $((t^{**}, s^{**}), b'^{**}) \in (\text{sons}^+(t^*) \times \text{sons}^+(s^*)) \times \text{sons}(b'^*)$  do
         $\text{INADMISSIBLE\_COL\_LEAF\_ASSEMBLETREE}(b, (t^{**}, s^{**}), b'^{**})$ 
      end for
    end if
  end if
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Der Aufruf dieses Algorithmus geschieht aus Algorithmus 4.3.18. Für die Beschreibung des hier verwendeten Grundprinzips sei auf die Algorithmusbeschreibung von Algorithmus 4.3.6 verwiesen.

Ist neben $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ auch der Block $b'^* = (t'^*, s'^*) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blatt, wird im Fall von $\text{level}(t'^*) > \text{level}(t)$ mit $t \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ die Wurzel des Assemblierungsbaums $\mathcal{T}_{t, t'^*, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \sim}^T}$ belegt und mit der Funktion $\text{ADD_INADMISSIBLE_LEAF_ASSEMBLETREE}$ über die Vorfahren von t^* das zugehörige unzulässige Blatt dieses Baums abgespeichert (vgl. Lemma 4.3.60). Analog geschieht dies für die Spaltencluster im Fall von $\text{level}(s'^*) > \text{level}(s)$ mit $s \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$.

Bemerkung 4.3.61 (Aufwand von Algorithmus 4.3.17). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ und $\tau_{\mathcal{J}} \sim$ zwei vererbare Clusterrelationen sowie \sim die zugehörige Blockrelation. Des Weiteren seien $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $(b', b) \in \mathcal{L}_{\sim}^-$.

Wir untersuchen zuerst den Fall $\text{level}(t') < \text{level}(t)$ mit $t' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, dann geschieht der Aufruf der Funktion `ADD_INADMISSIBLE_LEAF_ASSEMBLETREE` durch Algorithmus 4.3.19 mit dem Cluster t und einem $t'^{**} \in \Pi_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}[\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}](b)$, wobei $b^+ \in \text{pred}(b)$ denjenigen Vorfahren von b mit $b^+ \in \text{row}^=(\tau_{\sim}, b')$ beschreibt.

Als Aufwand betrachten wir hier die Anzahl der Durchläufe der while-Schleife aus Algorithmus 4.3.17 sowie die Abfrage, ob für ein $t'^{**} \in \text{pred}(t'^{**})$ bereits $t \in \text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{t', t, \tau_{\mathcal{I}} \sim}, t'^{**})$ gilt. Da die Menge $\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{t', t, \tau_{\mathcal{I}} \sim}, t'^{**})$ entweder leer ist oder nur den Cluster t enthält (vgl. Bemerkung 4.3.53), folgt

$$\#\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{t', t, \tau_{\mathcal{I}} \sim}, t'^{**}) \leq 1, \quad (4.87)$$

womit wir für diese Abfrage maximal eine Operation benötigen.

Es gelte $\text{level}(t'^{**}) > \text{level}(t)$, da sonst keine Durchläufe der while-Schleife anfallen. Die Anzahl dieser Durchläufe ist durch den maximalen Levelunterschied von t'^{**} und t beschränkt. Wir müssen nun also

$$\text{level}(t'^{**}) - \text{level}(t) \in \mathbb{N}$$

abschätzen.

Mit $t'^{**} \in \Pi_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}[\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}](b)$ existiert nach Definition 4.3.59 ein

$$(b', (t'^{**}, s'^{**}), b) \in \mathcal{L}_{(b', b^+), \sim}^-$$

und damit ein Pfad

$$((b'_0, (t'_0, s'_0), b_0), \dots, (b'_n, (t'_n, s'_n), b_n))$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ von $\text{root}(\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}) = (b', (t', s'), b^+)$ nach $(b', (t'^{**}, s'^{**}), b)$ in $\mathcal{T}_{(b', b^+), \sim}$. Es gilt also

$$(b'_i, (t'_i, s'_i), b_i) \in \{b'_{i-1}\} \times (\text{sons}^+(t'_{i-1}) \times \text{sons}^+(s'_{i-1})) \times \text{sons}(b_{i-1})$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Damit ist (t'_0, \dots, t'_n) ein erweiterter Pfad von $t'_0 = t'$ nach $t'_n = t'^{**}$ in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und (b_0, \dots, b_n) ein Pfad von $b_0 = b^+$ nach $b_n = b$ in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Es folgt

$$\text{level}(t'^{**}) - \text{level}(t') \leq n \quad (4.88)$$

und mit $b^+ \in \text{row}^=(\tau_{\sim}, b')$

$$n = \text{level}(b) - \text{level}(b^+) = \text{level}(b) - \text{level}(b'). \quad (4.89)$$

Aus $\text{level}(t') < \text{level}(t)$ und $t' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ folgt nach Kontraposition des Lemmas 3.2.6

$$\text{level}(b') \stackrel{3.2.6}{=} \text{level}(t') < \text{level}(t) \leq \text{level}(b).$$

4 Matrix-Galerkin-Verfahren

Damit gilt $(b', b) \neq \text{root}(\mathcal{T}_\sim)$, womit aus der rekursiven Darstellung des Vaters (vgl. Lemma 3.2.8) $(b', b) \in \text{sons}((b', \text{father}(b)))$, also insbesondere $(b', \text{father}(b)) \in \mathcal{T}_\sim \setminus \mathcal{L}_\sim$ folgt.

Aus $\text{level}(b') \leq \text{level}(\text{father}(b))$ sowie $b^+ \in \text{pred}(b)$ mit $\text{level}(b') = \text{level}(b^+)$ folgt $\text{father}(b) \in \text{sons}^*(b^+)$. Es gilt also

$$\text{father}(b) \in \{\tilde{b} \in \text{sons}^*(b^+) \mid (b', \tilde{b}) \in \mathcal{T}_\sim \setminus \mathcal{L}_\sim\} = U_1(\mathcal{T}_\sim, (b', b^+))$$

(vgl. Definition 3.4.6), was mit $b^+ \in \text{row}^=(\mathcal{T}_\sim, b')$ und $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ nach Definition 3.4.18

$$\begin{aligned} \text{level}(\text{father}(b)) - \text{level}(b') &\leq \max_{\tilde{b}^* \in U_1(\mathcal{T}_\sim, (b', b^+))} \text{level}(\tilde{b}^*) - \text{level}(b') \stackrel{3.4.18}{=} L_1(\mathcal{T}_\sim, (b', b^+)) \\ &\leq \max_{\substack{\tilde{b}' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \\ \tilde{b}^+ \in \text{row}^=(\mathcal{T}_\sim, \tilde{b}')}} L_1(\mathcal{T}_\sim, (\tilde{b}', \tilde{b}^+)) \stackrel{3.4.18}{=} C_{L_1, \mathcal{T}_\sim} \end{aligned}$$

bedeutet. Somit gilt

$$\text{level}(b) - \text{level}(b') = \text{level}(\text{father}(b)) + 1 - \text{level}(b') \leq C_{L_1, \mathcal{T}_\sim} + 1,$$

was zusammen mit $\text{level}(t') < \text{level}(t)$ sowie (4.88) und (4.89)

$$\begin{aligned} \text{level}(t'^{**}) - \text{level}(t) &< \text{level}(t'^{**}) - \text{level}(t') \leq n \\ &= \text{level}(b) - \text{level}(b') \leq C_{L_1, \mathcal{T}_\sim} + 1 \end{aligned}$$

bedeutet. Durch (4.87) ergibt sich für Algorithmus 4.3.17 ein maximaler Aufwand von

$$C_{L_1, \mathcal{T}_\sim} + 1 + 1 = C_{L_1, \mathcal{T}_\sim} + 2.$$

Betrachten wir nun den Fall $\text{level}(t') > \text{level}(t)$ mit $t \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, dann wird die Funktion `ADD_INADMISSIBLE_LEAF_ASSEMBLETREE` durch Algorithmus 4.3.20 mit dem Cluster t' und einem $t^{**} \in \Pi_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}[\mathcal{T}_{(b, b^+), \sim_T}](b')$ aufgerufen, wobei $b'^+ \in \text{pred}(b')$ denjenigen Vorfahren von b' mit $b'^+ \in \text{col}^=(\mathcal{T}_\sim, b) = \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim_T}, b)$ (vgl. Lemma 4.2.28) beschreibt.

Mit einer analogen Diskussion wie im obigen Fall folgt dann unter Verwendung von $C_{L_1, \mathcal{T}_{\sim_T}} = C_{L_2, \mathcal{T}_\sim}$ (vgl. Korollar 3.4.20)

$$\text{level}(t'^{**}) - \text{level}(t') \leq C_{L_1, \mathcal{T}_{\sim_T}} + 1 = C_{L_2, \mathcal{T}_\sim} + 1,$$

womit der Aufwand des Algorithmus 4.3.17 dann durch $C_{L_2, \mathcal{T}_\sim} + 2$ beschränkt ist.

Da keine besonderen Eigenschaften von $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ bzw. $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ in der obigen Diskussion verwendet wurden, ergeben sich für die Spaltencluster im Fall von $\text{level}(s') < \text{level}(s)$ mit $s' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$ bzw. $\text{level}(s') > \text{level}(s)$ mit $s \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$ die gleichen Schranken für den Aufwand.

Bemerkung 4.3.62 (Aufwand von Algorithmus 4.3.18). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \sim$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim$ zwei vererbare Clusterrelationen sowie \sim die zugehörige Blockrelation. Des Weiteren sei \mathcal{T}_\sim $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_\sim}$ -schwachbesetzt und es existiere ein $C_{\text{Adm}} \in \mathbb{N}_0$ so, dass die Auswertung der in Algorithmus 4.3.18 angegebenen (Un-)Zulässigkeitsbedingung mit

einem maximalen Aufwand von C_{Adm} durchgeführt werden kann — bzgl. einer oberen Schranke für C_{Adm} sei auf Bemerkung 4.3.22 verwiesen. Für die Bestimmung der Menge \mathcal{L}_{\sim}^- entspricht Algorithmus 4.3.18 dem Algorithmus 4.3.4 — wenn wir die Aufrufe der Funktion `ADD_INADMISSIBLE_LEAF_ASSEMBLETREE` vernachlässigen. Nach Satz 4.3.21 besitzt Algorithmus 4.3.4 mit

$$C_{\text{sons}} := \max_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}, s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}, b \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \# \text{sons}(t) \# \text{sons}(s) \# \text{sons}(b) \geq 2$$

einen maximalen Aufwand von

$$C_{\text{Adm}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\sim}}^= \left(2C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\sim}} \left(C_{\text{sons}}^{C_{L_1, \mathcal{T}_{\sim}}+1} + C_{\text{sons}}^{C_{L_2, \mathcal{T}_{\sim}}+1} \right) + 1 \right) \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}. \quad (4.90)$$

Wir beziehen nun den Algorithmus 4.3.17 mit in diese Aufwandsabschätzung ein und betrachten den Aufwand der Funktion `ADD_INADMISSIBLE_LEAF_ASSEMBLETREE` wie in Bemerkung 4.3.61 angegeben. Nach der dortigen Diskussion lässt sich dieser Aufwand für einen Aufruf von Algorithmus 4.3.17 durch

$$C_{L_1, \mathcal{T}_{\sim}} + 2 \quad \text{bzw.} \quad C_{L_2, \mathcal{T}_{\sim}} + 2$$

beschränken. Für jedes Element aus \mathcal{L}_{\sim}^- können maximal zwei Aufrufe des Algorithmus 4.3.17 auftreten — einer für die Zeilen- und einer für die Spaltencluster des entsprechenden Elements. Die Funktion `ADD_INADMISSIBLE_LEAF_ASSEMBLETREE` wird nur aus den Algorithmen 4.3.19 und 4.3.20 aufgerufen, welche wir in der Theorie durch Auswertungsbäume (vgl. Definition 4.3.14) beschrieben haben.

Ein zusätzlicher Aufwand fällt also (vgl. Lemma 4.3.60) nur für Elemente aus

$$\mathcal{L}_{(b', b), \sim}^- \quad \text{mit} \quad b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \quad \text{mit} \quad b \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b') \quad (4.91)$$

(Algorithmus 4.3.19) bzw. für Elemente aus

$$\mathcal{L}_{(b, b'), \sim^T}^- \quad \text{mit} \quad b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \quad \text{mit} \quad b' \in \text{col}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b) \quad (4.92)$$

(Algorithmus 4.3.20) an.

Der zusätzliche Aufwand für die zwei potentiell anfallenden Aufrufe von Algorithmus 4.3.17 lässt sich nach Bemerkung 4.3.61 im Fall von (4.91) mit Lemma 4.3.19 (a) durch

$$\begin{aligned} & \sum_{b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \sum_{b \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b')} 2 \left(C_{L_1, \mathcal{T}_{\sim}} + 2 \right) \# \mathcal{L}_{(b', b), \sim}^- \\ & \leq \sum_{b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \sum_{b \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b')} 2 \left(C_{L_1, \mathcal{T}_{\sim}} + 2 \right) \# \mathcal{T}_{(b', b), \sim} \\ & \leq 4 \left(C_{L_1, \mathcal{T}_{\sim}} + 2 \right) C_{\text{sons}}^{C_{L_1, \mathcal{T}_{\sim}}+1} \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \end{aligned} \quad (4.93)$$

und im Fall von (4.92) mit Lemma 4.3.19 (b) durch

$$\begin{aligned} & \sum_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \sum_{b' \in \text{col}^=(\mathcal{T}_{\sim}, b)} 2 \left(C_{L_2, \mathcal{T}_{\sim}} + 2 \right) \# \mathcal{L}_{(b, b'), \sim^T}^- \\ & \leq 4 \left(C_{L_2, \mathcal{T}_{\sim}} + 2 \right) C_{\text{sons}}^{C_{L_2, \mathcal{T}_{\sim}}+1} \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \end{aligned} \quad (4.94)$$

beschränken. Durch die Addition von (4.90) mit (4.93) und (4.94) entsteht also wieder ein in $\#\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ asymptotisch linearer Aufwand, vorausgesetzt alle anderen dort auftretenden Größen lassen sich unabhängig von $\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$ beschränken.

Für die Konstruktion aller unzulässigen Blöcke eines benötigten Assemblierungsbaums anhand der Wurzel und der Menge aller unzulässigen Blätter lässt sich Algorithmus 4.3.21 verwenden. Dieser ist in Anlehnung an Algorithmus 4.3.8 für die Konstruktion aller unzulässigen Blöcke eines Relationsbaums formuliert und basiert auf der Aussage des Lemmas 4.3.58. Durch die Verwendung des konstanten Teilbaums als Spaltenclusterbaum muss in diesem Algorithmus lediglich zu den Vorfahren des Zeilenclusters übergegangen werden.

Algorithmus 4.3.21 Aufstellen der Menge $\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\sim}^-$ über $\mathcal{L}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\sim}^-$.

```

procedure BUILD_INADMISSIBLE_BLOCKS_ASSEMBLETREE( $\mathcal{L}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\sim}^-$ )
  for all  $(p^*, q) \in \mathcal{L}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\sim}^-$  do
     $p^+ \leftarrow p^*$ 
    while  $p^+ \neq p$  do
       $p^+ \leftarrow \text{father}(p^+)$ 
      if  $q \notin \text{row}^-(\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\sim}, p^+)$  then
         $\text{row}^-(\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\sim}, p^+) \leftarrow \text{row}^-(\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\sim}, p^+) \cup \{q\}$ 
      else
        break
      end if
    end while
  end for
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Dieser Algorithmus entspricht dem Algorithmus 4.3.8 (vgl. auch Algorithmus 4.3.7) für das Aufstellen aller unzulässigen Blöcke über die Menge der unzulässigen Blätter, wobei hier die spezielle Struktur der Menge $\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\sim}^-$ eines Assemblierungsbaums für $p, q \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $\text{level}(p) < \text{level}(q)$ und $p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ ausgenutzt wird. Für ein Blatt $(p^*, q) \in \mathcal{L}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\sim}^-$ wird mit der rekursiven Darstellung des Vaters in einem Blockbaum — siehe (3.6) aus Lemma 3.2.8 — zu dessen Vorfahren übergegangen. Dies geschieht durch den Übergang zu den Vorfahren von p^* aufgrund der Verwendung des konstanten Teilbaums $\bar{\mathcal{T}}_q$ als Spaltenclusterbaum von $\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\sim}$. Im Fall von $p^+ = p$ ist die Wurzel des Zeilenclusterbaums von $\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\sim}$ erreicht und gilt für ein $(p^+, q) \in \mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\sim}^-$ bereits $q \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\sim}, p^+)$, so wurden alle Vorfahren dieses Blocks bereits durch den Algorithmus behandelt. Es wird dann zum nächsten Element aus $\mathcal{L}_{p,q,\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\sim}^-$ übergegangen.

Bemerkung 4.3.63 (Aufwand von Algorithmus 4.3.21). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ und $\tau_{\mathcal{J}} \sim$ zwei vererbare Clusterrelationen sowie \sim die zugehörige Blockrelation. Seien weiter $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $(b', b) \in \mathcal{L}_{\sim}^-$ und $(p, q, \mathcal{K}) \in \{(t', t, \mathcal{I}), (s', s, \mathcal{J})\}$ sowie $C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}} := \max_{r \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}}} \# \text{sons}(r) \geq 2$.

Als Aufwand betrachten wir hier — in Analogie zu Bemerkung 4.3.28 — die Abfrage, ob ein Cluster bereits in der unzulässigen Blockzeile eines zweiten Clusters vorhanden ist oder nicht. Durch die Verwendung eines konstanten Clusterbaums als Spaltenclusterbaum (vgl. Definition 4.3.36), bestehen alle unzulässigen Blockzeilen maximal aus einem Cluster, womit diese Abfrage lediglich eine Operation erfordert.

(a) Gilt $\text{level}(p) < \text{level}(q)$ mit $p \notin \mathcal{L}_{\mathcal{K}}$, dann folgt mit

$$\max_{(p^*, q) \in \mathcal{T}_{p, q, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \sim}} \# \text{sons}_{\mathcal{A}}((p^*, q)) \leq C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}},$$

Bemerkung 4.3.26 sowie Lemma 4.3.52 (a), dass der Gesamtaufwand von Algorithmus 4.3.21 in diesem Fall durch

$$C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}} \# \mathcal{T}_{p, q, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \sim} \leq 2C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}}^{C_{L_1, \tau_{\sim}} + 2}$$

beschränkt ist.

(b) Gilt $\text{level}(p) > \text{level}(q)$ mit $q \notin \mathcal{L}_{\mathcal{K}}$, dann folgt mit

$$\max_{(q^*, p) \in \mathcal{T}_{q, p, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \sim^T}} \# \text{sons}_{\mathcal{A}}((q^*, p)) \leq C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}},$$

Bemerkung 4.3.26 sowie Lemma 4.3.52 (b), dass der Gesamtaufwand von Algorithmus 4.3.21 in diesem Fall durch

$$C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}} \# \mathcal{T}_{q, p, \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \sim^T} \leq 2C_{\text{sons}, \mathcal{T}_{\mathcal{K}}}^{C_{L_2, \tau_{\sim}} + 2}$$

beschränkt ist.

Bemerkung 4.3.64 (Mehrfaches Auftreten). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $\tau_{\mathcal{I}} \sim$ und $\tau_{\mathcal{J}} \sim$ zwei vererbare Clusterrelationen sowie \sim die zugehörige Blockrelation. Bei der Konstruktion der Menge \mathcal{L}_{\sim}^- unter Verwendung der Algorithmen 4.3.19 und 4.3.20 könnte durchaus der Fall auftreten, dass für ein Blatt $b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ zwei unterschiedliche Blätter $b_1 = (t_1, s_1), b_2 = (t_2, s_2) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit $(b', b_1), (b', b_2) \in \mathcal{L}_{\sim}^-$ existieren, die denselben Assemblierungsbaum benötigen. Dies tritt auf, wenn zum Beispiel

$$s_1 = s_2 \quad \text{und} \quad \text{level}(s') < \text{level}(s_1) = \text{level}(s_2) \quad \text{mit} \quad s' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$$

gilt, wie in Abbildung 4.23 dargestellt.

Gehen wir davon aus, dass das Element (b', b_1) vor (b', b_2) der Menge \mathcal{L}_{\sim}^- hinzugefügt wurde, dann würde sich die hier beschriebene Situation in Algorithmus 4.3.19 dadurch

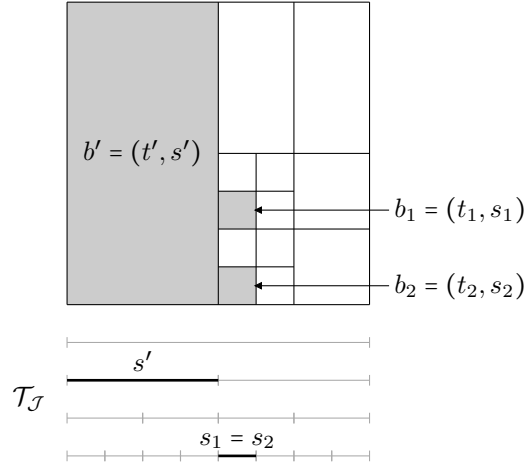


Abbildung 4.23: Elemente $(b', b_1), (b', b_2) \in \mathcal{L}_{\sim}^-$ mit $s_1 = s_2$ und $\text{level}(s') < \text{level}(s_1) = \text{level}(s_2)$ sowie $s' \notin \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$.

bemerkbar machen, dass die Wurzel des Assemblierungsbaums $\mathcal{T}_{s', s_2, \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim}$ schon erzeugt worden wäre — es gilt $\text{root}(\mathcal{T}_{s', s_2, \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim}) = (s', s_2) = (s', s_1) = \text{root}(\mathcal{T}_{s', s_1, \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \sim})$. Dies ließe sich — bei entsprechender Implementierung — mit einer if-Anweisung abfangen, um diesen Baum beim Assemblieren nur ein einziges mal durchlaufen zu müssen. Analog gilt der hier diskutierte Fall selbstverständlich auch für die Zeilencluster.

Bemerkung 4.3.65 (Matrix-Galerkin-Blockrelation). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ zwei Matrizen sowie $\succ_{(A, B)}$ die Matrix-Galerkin-Blockrelation bzgl. A und B in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Weiter seien \succ_A und \succ_B die dieser Blockrelation zugrundeliegenden Matrix-Galerkin-Clusterrelationen bzgl. A in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ bzw. B in $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$. Da \succ_A und \succ_B nach Korollar 4.2.17 vererbbar sind, lassen sich die in diesem Abschnitt definierten Algorithmen für das Aufstellen der Menge $\mathcal{L}_{\sim(A, B)}^-$ inklusive der Konstruktion aller zum Assemblieren des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems benötigten Assemblierungsbäume verwenden. Insbesondere übertragen sich auch alle bzgl. des Aufwands hergeleiteten Aussagen.

5 Lösungsstrategien

Für einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, drei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$, $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ und $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie zwei orthogonale, geschachtelte Clusterbasen $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ wurde zur Konstruktion einer Approximation der Lösung $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ von

$$AXB^* = C \quad (5.1)$$

im \mathcal{H}^2 -Matrix-Format in Kapitel 4 das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem

$$\sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} (V_t^* A V_t) S_b (W_{s'}^* B W_{s'})^* = V_{t'}^* C W_{s'} \quad \text{für alle } b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \quad (5.2)$$

zur Bestimmung einer Familie $(S_b)_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ von Kopplungsmatrizen hergeleitet (vgl. Definition 4.1.10).

Die Diskussion aus Abschnitt 4.3.1 hat gezeigt, dass sich die Anzahl der Nicht-Null-Koeffizienten von (5.2) unter geeigneten Voraussetzungen asymptotisch linear in $\#\mathcal{I}$ und $\#\mathcal{J}$ verhält. Zur Berechnung einer Lösung eignen sich z.B. *Iterationsverfahren*.

Dieses Kapitel widmet sich nun der Einführung der in Kapitel 6 — über die numerischen Ergebnisse — verwendeten Algorithmen. Die folgenden Betrachtungen orientieren sich überwiegend an [33, 31, 40]. In diesen Referenzen finden sich neben den konkreten Definitionen der hier verwendeten Iterationsvorschriften — sowie weiteren Lösungsverfahren — auch ausführliche Analysen dieser, z.B. hinsichtlich Aufwand und Konvergenz.

Wie auch schon bei der Herleitung des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems über eine Variationsformulierung (siehe Abschnitt 4.1), wird die Matrixgleichung (5.1) als Diskussionsgrundlage dieses Kapitels verwendet. Eine Erweiterung auf allgemeine lineare Matrixgleichungen der Form

$$\sum_{i=1}^N A_i X B_i^* = C,$$

mit $N \in \mathbb{N}$ sowie $A_i \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B_i \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ für alle $i \in \{1, \dots, N\}$, erfolgt an entsprechender Stelle in Form von Bemerkungen. Des Weiteren werden die Koeffizienten des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems generell so geschrieben wie in (5.2), für die Algorithmen — sowie die Analyse und Diskussion dieser — allerdings die Darstellung über Interaktionsmatrizen

$$\sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} A_{t',t} S_b (B_{s's})^* = V_{t'}^* C W_{s'} \quad \text{für alle } b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$$

(vgl. Abschnitt 4.3.3) verwendet. Aufgrund der Untersuchungen in den vorherigen Abschnitten sind beide Darstellungen äquivalent. Diese unterschiedlichen Notationen dienen nur dazu, die theoretischen Betrachtungen von der konkreten Implementierung abzugrenzen.

5.1 Operatordarstellung

Wir werden in Abschnitt 5.2 das Verfahren der *konjugierten Gradienten* in dessen *vor-konditionierter* Variante (vgl. z.B. [33, Abschnitt 9.4.4]) zum Lösen des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems betrachten. Da dieses ein *Krylow-Raum-Verfahren* ist — siehe z.B. [40, Kapitel 6] für eine ausführlichere Analyse dieser Klasse von Lösungsstrategien —, werden wir das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem als Operatorgleichung schreiben.

In allen vorherigen Abschnitten haben wir das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem immer in der Form (5.2), also über die komponentenweise Interaktion der Freiheitsgrade beschrieben. Um diese Interaktion nun global in einem Operator zusammenfassen zu können, muss ein geeigneter Raum zugrundegelegt werden. Da die Freiheitsgrade durch die Familie der Kopplungsmatrizen $(S_b)_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ gegeben sind, nennen wir diesen Raum *Kopplungsraum*.

Definition 5.1.1 (Kopplungsraum und Kopplungsskalarprodukt). *Seien ein Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie zwei Rangverteilungen $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $L_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ gegeben. Für die Elemente des kartesischen Produkts*

$$\mathcal{V} := \bigtimes_{(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \mathbb{R}^{K_t \times L_s}$$

schreiben wir $\mathbf{X} \in \mathcal{V}$ und bezeichnen die Komponenten von \mathbf{X} mit $(\mathbf{X})_b \in \mathbb{R}^{K_t \times L_s}$ oder auch $X_b \in \mathbb{R}^{K_t \times L_s}$ für alle $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.

Wir definieren die Verknüpfungen

$$\begin{aligned} \boxplus : \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V}, & (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &\mapsto (X_b + Y_b)_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \\ \boxtimes : \mathbb{R} \times \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V}, & (\lambda, \mathbf{X}) &\mapsto (\lambda X_b)_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \end{aligned}$$

und nennen das Tupel $(\mathcal{V}, \boxplus, \boxtimes)$ Kopplungsraum bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $L_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ bzw. einfach Kopplungsraum, wenn die Zugehörigkeit zu $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $L_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ aus dem Zusammenhang ersichtlich wird. Des Weiteren schreiben wir für $(\mathcal{V}, \boxplus, \boxtimes)$ auch vereinfachend nur \mathcal{V} , verwenden diese Menge also immer nur in Verbindung mit der Addition \boxplus und der Skalarmultiplikation \boxtimes .

Die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\boxplus} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mapsto \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_{\boxplus} := \sum_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \langle X_b, Y_b \rangle_F$$

nennen wir Kopplungsskalarprodukt.

Bemerkung 5.1.2 (Kopplungsraum und Kopplungsskalarprodukt). *Aufgrund der Disjunktheit der Beschriftungen aller Blätter eines Blockbaums (vgl. Korollar 3.2.5) lässt sich direkt nachrechnen, dass die in obiger Definition eingeführte Menge \mathcal{V} zusammen mit der Addition \boxplus und Skalarmultiplikation \boxtimes einen linearen Raum sowie das Kopplungsskalarprodukt ein Skalarprodukt auf \mathcal{V} definiert. Insbesondere lässt sich somit über*

$$\| \cdot \|_{\boxplus} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{X} \mapsto \|\mathbf{X}\|_{\boxplus} := \sqrt{\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle_{\boxplus}}$$

eine Norm — die Kopplungsnorm — auf \mathcal{V} definieren.

Der Raum \mathcal{V} ist endlich-dimensional, womit $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{F}})$ zu einem Hilbertraum wird — vgl. mit dem Beweis von Lemma 2.1.13 für den Nachweis der Hilbertraumeigenschaft des Matrix-Raums bzw. mit der dort verwendeten Referenz [20, Satz 2.5].

Es lässt sich direkt nachrechnen, dass mit der Abbildung

$$\boxminus : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \quad (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mapsto (X_b - Y_b)_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$$

für alle $\mathbf{X} \in \mathcal{V}$

$$\mathbf{X} \boxminus \mathbf{X} = \mathbf{0} = \mathbf{X} \boxplus (-\mathbf{X})$$

gilt, wobei $-\mathbf{X} \in \mathcal{V}$ das zu \mathbf{X} inverse Element und $\mathbf{0} \in \mathcal{V}$ das neutrale Element bzgl. \boxplus seien. Wir verwenden die Subtraktion \boxminus aus diesem Grund anstelle der Addition mit den entsprechenden inversen Elementen.

Mit der Definition 5.1.1 eines Kopplungsraums sind wir nun in der Lage, Matrix-Galerkin-Operatoren zu definieren, welche — zusammen mit einer rechten Seite — ein Matrix-Galerkin-Gleichungssystem widerspiegeln.

Definition 5.1.3 (Matrix-Galerkin-Operator). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ sowie $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ zwei Clusterbasen mit Rangverteilungen $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ bzw. $L_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$. Sei weiter \mathcal{V} der Kopplungsraum bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $L_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$, dann nennen wir die Abbildung

$$\mathcal{G} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \quad \mathbf{S} \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{S}),$$

mit

$$(\mathcal{G}(\mathbf{S}))_{b'} := \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} (V_{t'}^* A V_t) S_b (W_{s'}^* B W_s)^* \quad (5.3)$$

für alle $\mathbf{S} \in \mathcal{V}$ und alle $b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, Matrix-Galerkin-Operator bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, A , B , $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$. In Analogie zu Definition 5.1.1 des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems lassen wir den Zusatz aller Parameter, die aus dem Kontext ersichtlich werden, vereinfachend auch weg.

Einen Zusammenhang zwischen einem Kopplungsraum und dem für die Konstruktion eines Matrix-Galerkin-Gleichungssystems verwendeten Raum der \mathcal{H}^2 -Matrizen beschreibt der Koeffizientenisomorphismus. Die Tatsache, dass die Abbildung der nachstehenden Definition einen Isomorphismus definiert, kann direkt nachgerechnet werden. Durch diese Abbildung lässt sich ein Matrix-Galerkin-Operator auch über die dem Matrix-Galerkin-Verfahren zugrundeliegende Bilinearform (vgl. Abschnitt 4.1) charakterisieren, wie Bemerkung 5.1.5 verdeutlichen wird.

Definition 5.1.4 (Koeffizientenisomorphismus). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ zwei geschachtelte Clusterbasen mit Rangverteilungen $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ bzw. $L_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$,

$$\mathcal{M} := \mathcal{H}^2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}, W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}})$$

5 Lösungsstrategien

der Raum aller \mathcal{H}^2 -Matrizen für $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ sowie \mathcal{V} der Kopplungsraum bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $L_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$, dann bezeichnen wir die Abbildung

$$\mathfrak{P} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}, \quad (S_b)_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \mapsto \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} V_t S_b W_s^*$$

als Koeffizientenisomorphismus von \mathcal{M} .

Bemerkung 5.1.5 (Kopplungsraum). *Es seien die Voraussetzungen aus Definition 5.1.4 gegeben. Seien weiter $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ sowie $\mathcal{G} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ der Matrix-Galerkin-Operator bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, A , B , $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$. Bezeichnen wir mit*

$$a : \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto \langle AXB^*, Y \rangle_F$$

die dem Matrix-Galerkin-Gleichungssystem bzgl. dieser Parameter zugrundeliegende Bilinearform, dann gilt für alle $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{V}$ mit dem Koeffizientenisomorphismus \mathfrak{P} aus Definition 5.1.4 die Gleichheit

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}(\mathbf{X}), \mathbf{Y} \rangle_{\mathbb{F}} &= \sum_{b'=(t',s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \langle (\mathcal{G}(\mathbf{X}))_{b'}, (\mathbf{Y})_{b'} \rangle_F \\ &= \sum_{b'=(t',s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \langle (V_{t'}^* A V_t) X_b (W_{s'}^* B W_s)^*, Y_{b'} \rangle_F \\ &= \sum_{b'=(t',s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \langle A (V_t X_b W_s^*) B^*, (V_{t'} Y_{b'} W_{s'}^*) \rangle_F \\ &= \left\langle A \left(\sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} V_t X_b W_s^* \right) B^*, \left(\sum_{b'=(t',s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} V_{t'} Y_{b'} W_{s'}^* \right) \right\rangle_F \\ &= \langle A \mathfrak{P}(\mathbf{X}) B^*, \mathfrak{P}(\mathbf{Y}) \rangle_F \\ &= a(\mathfrak{P}(\mathbf{X}), \mathfrak{P}(\mathbf{Y})). \end{aligned}$$

Auf diese Weise lässt sich der Matrix-Galerkin-Operator durch die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ charakterisieren. Unter anderem sind wir damit in der Lage, Eigenschaften von $a(\cdot, \cdot)$ auf \mathcal{G} zu übertragen.

Setzen wir nun unter Verwendung der Notationen aus Definition 5.1.1 für eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ die Matrizen

$$C_{b'} := V_{t'}^* C W_{s'} \in \mathbb{R}^{K_{t'} \times L_{s'}} \quad \text{für alle } b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$$

sowie

$$\mathbf{C} := (C_{b'})_{b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \in \mathcal{V},$$

dann lässt sich das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem (vgl. (5.2)) mit der gesuchten Lösung $\mathbf{S} = (S_b)_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \in \mathcal{V}$ schreiben als

$$\mathcal{G}(\mathbf{S}) = \mathbf{C}.$$

Diese Darstellung — zusammen mit der Linearität des Raums \mathcal{V} — wird sich in den Abschnitten 5.3 und 5.4 als besonders hilfreich für die Definition der dortigen Lösungsverfahren erweisen.

Algorithmus 5.1.1 spiegelt die Auswertung eines Matrix-Galerkin-Operators \mathcal{G} für ein Element \mathbf{X} des zugrundeliegenden Kopplungsraums wider. Für die Operationen \boxplus und \boxminus sowie die Auswertung des Kopplungsskalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{F}}$ werden an dieser Stelle keine expliziten Algorithmen angegeben. Die algorithmische Umsetzung kann durch die blockweise Definition mit einer Schleife über die Blätter des Blockbaums realisiert werden. Den Aufwand dieser Operationen sowie den Aufwand des Algorithmus 5.1.1 schätzen wir in Lemma 5.1.6 ab.

Algorithmus 5.1.1 Auswertung eines Matrix-Galerkin-Operators \mathcal{G} für ein Element $\mathbf{X} \in \mathcal{V}$ des Kopplungsraums \mathcal{V} . Es liegen hier ein Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ sowie zwei Clusterbasen $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ zugrunde. Des Weiteren bezeichnet $\mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}$ den auf der Blockrelation $\prec_{(A,B)}$ bzgl. A und B in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ basierenden, zugehörigen Relationsbaum.

```

procedure EVALUATE_MATRIXGALERKIN_OPERATOR( $\mathcal{G}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}$ )
    for all  $b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$  do
         $Y_{b'} \leftarrow 0$ 
        for all  $b = (t, s) \in \text{row}_{\mathcal{L}}^{-}(\mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}, b')$  do
             $Y_{b'} \leftarrow Y_{b'} + A_{t',t} X_b (B_{s',s})^*$ 
        end for
    end for
end procedure
    
```

Algorithmusbeschreibung. Dieser Algorithmus wertet den Matrix-Galerkin-Operator \mathcal{G} für ein Element $\mathbf{X} \in \mathcal{V}$ des Kopplungsraums \mathcal{V} aus und überschreibt $\mathbf{Y} \in \mathcal{V}$ mit dem Ergebnis.

Die Vorgehensweise basiert auf der komponentenweisen Darstellung (5.3) von \mathcal{G} , wobei in der dort auftretenden Summe lediglich die Nicht-Null-Koeffizienten des Operators betrachtet werden. Diese sind für alle $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ durch die unzulässige Blockzeile $\text{row}_{\mathcal{L}}^{-}(\mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}, b')$ des Matrix-Galerkin-Relationsbaums $\mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}$ gegeben.

Lemma 5.1.6 (Aufwand). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ zwei Matrizen sowie $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ zwei Clusterbasen mit Rangverteilungen $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ bzw. $L_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$. Es seien \mathcal{V} der Kopplungsraum und $\mathcal{G} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ der Matrix-Galerkin-Operator bzgl. der entsprechenden Parameter, $\prec_{(A,B)}$ die Matrix-Galerkin-Blockrelation bzgl. A und B in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie $\mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}$ der zugehörige Relationsbaum. Des Weiteren sei $\mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}} C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}}$ schwachbesetzt und

$$k_{\max} := \max_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}, s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}} \{\#K_t, \#L_s\},$$

5 Lösungsstrategien

dann fallen für alle $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{V}$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ für $\mathbf{X} \boxplus \mathbf{Y}$ und $\lambda \boxdot \mathbf{X}$ nicht mehr als

$$k_{\max}^2 \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}},$$

für $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_{\mathbb{F}}$ nicht mehr als

$$2k_{\max}^2 \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$$

und für die Auswertung von $\mathcal{G}(\mathbf{X})$ durch Algorithmus 5.1.1 nicht mehr als

$$5C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec(A,B)}} k_{\max}^3 \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$$

arithmetische Operationen an.

Beweis. Seien $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{V}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Für alle $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gilt $X_b, Y_b \in \mathbb{R}^{K_t \times L_s}$, womit die Berechnung von $X_b + Y_b$ und λX_b jeweils nicht mehr als k_{\max}^2 sowie die Berechnung von $\langle X_b, Y_b \rangle_F$ — mit höchstens k_{\max}^2 Multiplikation und $(k_{\max}^2 - 1)$ Additionen — nicht mehr als $2k_{\max}^2$ arithmetische Operationen erfordert.

Durch die blockweisen Darstellungen beider Operationen, lässt sich der Aufwand von $\mathbf{X} \boxplus \mathbf{Y}$ und $\lambda \boxdot \mathbf{X}$ jeweils durch

$$\sum_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} k_{\max}^2 = k_{\max}^2 \# \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \leq k_{\max}^2 \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$$

sowie der Aufwand von $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_{\mathbb{F}}$ durch

$$\sum_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} 2k_{\max}^2 \leq 2k_{\max}^2 \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$$

beschränken.

Seien nun $b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie $b = (t, s) \in \text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\prec(A,B)}, b')$, dann erfordern die Multiplikation von $A_{t',t}$ mit X_b sowie die Multiplikation von $A_{t',t}X_b$ mit $(B_{s',s})^*$ jeweils nicht mehr als $2k_{\max}^3$ arithmetische Operationen. Für $Y_{b'} + A_{t',t}X_b(B_{s',s})^*$ entstehen zusätzlich maximal $k_{\max}^2 \leq k_{\max}^3$ Additionen, womit der Aufwand von Algorithmus 5.1.1 somit insgesamt durch

$$\begin{aligned} \sum_{b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \sum_{b \in \text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\prec(A,B)}, b')} 5k_{\max}^3 &\leq \sum_{b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} 5C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec(A,B)}} k_{\max}^3 \\ &\leq 5C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec(A,B)}} k_{\max}^3 \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \end{aligned}$$

beschränkt ist. □

Bemerkung 5.1.7 (Aufwand der Subtraktion). *Es seien die Voraussetzungen von Lemma 5.1.6 gegeben. Da in der vorliegenden Arbeit bezüglich des Aufwands von Algorithmen Subtraktionen als Additionen angesehen werden, entstehen mit $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{V}$ und \boxminus aus Bemerkung 5.1.2 für $\mathbf{X} \boxminus \mathbf{Y}$ ebenfalls nicht mehr als*

$$k_{\max}^2 \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$$

arithmetische Operationen.

In dem folgenden Abschnitt über das *Gauß-Seidel-Verfahren* werden wir vorerst auf die Darstellung (5.2) des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems zurückgreifen. Dieses Verfahren gehört zu der Klasse der sogenannten *Splitting-Verfahren* — siehe z.B. [39, Abschnitt 4.1] für eine allgemeine Definition. Für die dort auftretenden, komponentenweisen Zugriffe auf die Koeffizienten des Gleichungssystems bzw. des Operators, ist die Darstellung (5.2) besser geeignet.

5.2 Gauß-Seidel-Verfahren

Eine Definition sowie Analyse des Gauß-Seidel-Verfahrens ist z.B. in [33, Abschnitt 4.2.2] zu finden. Bei diesem Verfahren zum Lösen eines linearen Gleichungssystems muss dieses System zuerst in dessen *Diagonal-, oberen Dreiecks- sowie unteren Dreiecksanteil* zerlegt werden. Um sinnvoll definieren zu können, was ein Dreiecksanteil ist, bedarf es einer Anordnung der Freiheitsgrade (vgl. [33, Abschnitt 2.1.1]). In unserem Fall des durch (5.2) gegebenen Matrix-Galerkin-Gleichungssystems sind also die Elemente aus $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ anzuordnen. Zu diesem Zweck führen wir nachstehend eine Bezeichnung für eine *totale Ordnung* auf der Blattmenge eines Blockbaums ein.

Bemerkung 5.2.1 (Totale Ordnung der Blätter). *Für einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sei im Folgenden vorausgesetzt, dass*

$$\iota : \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \rightarrow \{1, \dots, \#\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}\}, \quad b \mapsto \iota(b)$$

eine bijektive Abbildung darstellt. Wir verwenden diese im weiteren Verlauf des aktuellen Abschnitts, um auf natürliche Weise eine totale Ordnung auf der Menge $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ zu induzieren.

Im Zuge des Gauß-Seidel-Algorithmus sind in jedem Schritt dieser Iteration Koeffizienten der Blockdiagonale zu „invertieren“. Bezeichnen wir die Rangverteilung von $V_{\mathcal{T}_t}$ mit $K_{\mathcal{T}_t}$ und die von $W_{\mathcal{T}_s}$ mit $L_{\mathcal{T}_s}$, dann bedeutet „invertieren“ bezogen auf das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem, dass für $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ die Gleichung

$$(V_t^* A V_t) S_b (W_s^* B W_s)^* = \tilde{C}_{t,s} \quad (5.4)$$

mit einer Matrix $\tilde{C}_{t,s} \in \mathbb{R}^{K_t \times L_s}$ zur Bestimmung von S_b aufgelöst werden muss. Diese Gleichung nennen wir im Folgenden auch *Diagonalsystem*.

Berechnen wir nun eine Lösung $\tilde{X} \in \mathbb{R}^{K_t \times L_s}$ von

$$(V_t^* A V_t) \tilde{X} = \tilde{C}_{t,s} \quad (5.5)$$

sowie anschließend eine Lösung $\tilde{Y} \in \mathbb{R}^{L_s \times K_t}$ von

$$(W_s^* B W_s) \tilde{Y} = \tilde{X}^*, \quad (5.6)$$

dann gilt

$$\begin{aligned} (V_t^* A V_t) \tilde{Y}^* (W_s^* B W_s)^* &= (V_t^* A V_t) ((W_s^* B W_s) \tilde{Y})^* \\ &= (V_t^* A V_t) (\tilde{X}^*)^* = (V_t^* A V_t) \tilde{X} \\ &= \tilde{C}_{t,s}. \end{aligned}$$

5 Lösungsstrategien

Die Matrix $\tilde{Y}^* \in \mathbb{R}^{K_t \times L_s}$ entspricht also gerade der Lösung von (5.4). Äquivalent wäre diese direkt über

$$((W_s^* B W_s) \otimes (V_t^* A V_t)) \text{vec}(S_b) = \text{vec}(\tilde{C}_{t,s}) \quad (5.7)$$

berechenbar — siehe Lemma 2.2.5 für die Äquivalenz von (5.4) und (5.7). Diese Variante über das Kronecker-Produkt ist insbesondere bei allgemeinen linearen Matrixgleichungen — mit mehr als einem einzigen Summanden — von Interesse, wie Bemerkung 5.2.3 verdeutlichen wird.

Sofern die entsprechenden Voraussetzungen erfüllt sind, ließen sich (5.5), (5.6) bzw. (5.7) mit einem beliebigen Verfahren lösen. Im Folgenden dienen hierzu *Cholesky-Zerlegungen*, wie sie z.B. in [49, Theorem 2.7] definiert werden. Wie dort zu erkennen, ist die positive Definitheit der zu zerlegenden Matrix ein hinreichendes Kriterium für die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Faktorisierung. Die oben hergeleiteten Gleichungen lassen sich dann über *Vorwärts-* und *Rückwärtseinsetzen* auflösen, wie es z.B. in [49, Kapitel 3 Abschnitt 1.5] beschrieben wird. Folgendes Lemma liefert das theoretische Fundament für die Existenz und Eindeutigkeit von Cholesky-Zerlegungen, wobei der (b)-Teil vor allem bei der Behandlung von allgemeinen linearen Matrixgleichungen von Interesse ist.

Lemma 5.2.2 (Positive Definitheit). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ zwei Clusterbäume, $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ zwei orthogonale Clusterbasen mit Rangverteilungen $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ bzw. $L_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ sowie $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{J}}$.*

(a) *Seien $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ positiv definit, dann sind*

$$V_t^* A V_t \in \mathbb{R}^{K_t \times K_t} \quad \text{und} \quad W_s^* B W_s \in \mathbb{R}^{L_s \times L_s}$$

ebenfalls positiv definit.

(b) *Seien $N \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B_i \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ symmetrische Matrizen sowie*

$$\alpha_i := \min\{\lambda\mu \mid \lambda \in \sigma(A_i) \text{ und } \mu \in \sigma(B_i)\}$$

für $i \in \{1, \dots, N\}$ mit $\alpha := \sum_{i=1}^N \alpha_i > 0$, dann ist

$$\sum_{i=1}^N (W_s^* B_i W_s) \otimes (V_t^* A_i V_t) \in \mathbb{R}^{(L_s \times K_t) \times (L_s \times K_t)}$$

positiv definit.

Beweis. (a) Für alle $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}} \setminus \{0\}$ gilt mit der positiven Definitheit von A

$$\langle A\tilde{x}, \tilde{x} \rangle_2 > 0.$$

Sei $x \in \mathbb{R}^{K_t} \setminus \{0\}$, dann gilt $\|V_t x\|_2 = \|x\|_2 \neq 0$ aufgrund der Orthogonalität von V_t , also $\tilde{x} := V_t x \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}} \setminus \{0\}$ und somit

$$\langle V_t^* A V_t x, x \rangle_2 = \langle A V_t x, V_t x \rangle_2 = \langle A\tilde{x}, \tilde{x} \rangle_2 > 0.$$

Des Weiteren folgt aus der Symmetrie von A die Gleichheit

$$(V_t^* A V_t)^* = V_t^* A^* V_t = V_t^* A V_t,$$

womit auch $V_t^* A V_t$ symmetrisch ist. Insgesamt ist $V_t^* A V_t$ damit positiv definit und auf analoge Weise folgt aus der positiven Definitheit von B diese Eigenschaft auch für $W_s^* B W_s$.

(b) Aus der Symmetrie der Matrizen A_i und B_i für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ folgt mit Lemma 2.2.4 (a)

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^N (W_s^* B_i W_s) \otimes (V_t^* A_i V_t) \right)^* &= \sum_{i=1}^N (W_s^* B_i W_s)^* \otimes (V_t^* A_i V_t)^* \\ &= \sum_{i=1}^N (W_s^* B_i^* W_s) \otimes (V_t^* A_i^* V_t) \\ &= \sum_{i=1}^N (W_s^* B_i W_s) \otimes (V_t^* A_i V_t), \end{aligned}$$

also die Symmetrie von $\sum_{i=1}^N (W_s^* B_i W_s) \otimes (V_t^* A_i V_t)$.

Sei $i \in \{1, \dots, N\}$, dann gilt nach Lemma 2.2.4 (c)

$$\alpha_i = \min\{\lambda\mu \mid \lambda \in \sigma(A_i) \text{ und } \mu \in \sigma(B_i)\} \stackrel{2.2.4 (c)}{=} \min\{\Lambda \mid \Lambda \in \sigma(B_i \otimes A_i)\}$$

und somit nach Lemma 2.1.5 (b) für alle $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ die Abschätzung

$$\alpha_i \|\text{vec}(X)\|_2^2 \leq \langle (B_i \otimes A_i) \text{vec}(X), \text{vec}(X) \rangle_2. \quad (5.8)$$

Sei nun $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \{0\}$, dann folgt mit $\alpha = \sum_{i=1}^N \alpha_i > 0$ und $X \neq 0$ die Ungleichung $0 < \alpha \|\text{vec}(X)\|_2^2$. Lemma 2.2.4 (b) sowie Lemma 2.2.5 liefern dann zusammen mit (5.8)

$$\begin{aligned} 0 < \alpha \|\text{vec}(X)\|_2^2 &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \|\text{vec}(X)\|_2^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^N \langle (B_i \otimes A_i) \text{vec}(X), \text{vec}(X) \rangle_2 \\ &= \sum_{i=1}^N \langle A_i X B_i^*, X \rangle_F. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Für alle $S \in \mathbb{R}^{K_t \times L_s} \setminus \{0\}$ gilt $\|V_t S W_s^*\|_F = \|S\|_F \neq 0$ mit der Orthogonalität von V_t

5 Lösungsstrategien

sowie W_s , also $\tilde{S} := V_t S W_s^* \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \{0\}$, womit (5.9) die Ungleichung

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^N (V_t^* A_i V_t) S (W_s^* B_i W_s)^*, S \right\rangle_F &= \sum_{i=1}^N \langle (V_t^* A_i V_t) S (W_s^* B_i^* W_s), S \rangle_F \\ &= \sum_{i=1}^N \langle A_i (V_t S W_s^*) B_i^*, (V_t S W_s^*) \rangle_F \\ &= \sum_{i=1}^N \langle A_i \tilde{S} B_i^*, \tilde{S} \rangle_F > 0 \end{aligned}$$

liefert. Es gilt somit

$$\left\langle \left(\sum_{i=1}^N (W_s^* B_i W_s) \otimes (V_t^* A_i V_t) \right) \text{vec}(S), \text{vec}(S) \right\rangle_2 > 0$$

für alle $S \in \mathbb{R}^{K_t \times L_s} \setminus \{0\}$ und da die Vektorabbildung bijektiv ist, folgt zusammen mit der Symmetrie von $\sum_{i=1}^N (W_s^* B_i W_s) \otimes (V_t^* A_i V_t)$ die positive Definitheit dieser Matrix. \square

Bemerkung 5.2.3 (Allgemeine lineare Matrixgleichung). *Es seien die Voraussetzungen von Lemma 5.2.2 (b) gegeben und wir betrachten für $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ die allgemeine lineare Matrixgleichung*

$$\sum_{i=1}^N A_i X B_i^* = C$$

zur Berechnung von $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Für eine Darstellung des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems dieser Gleichung sei auf Bemerkung 4.1.11 verwiesen.

Im Zuge des Gauß-Seidel-Verfahrens sind hier für $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ Gleichungen der Form

$$\sum_{i=1}^N (V_t^* A_i V_t) S_b (W_s^* B_i W_s)^* = \tilde{C}_{t,s} \quad (5.10)$$

mit einer Matrix $\tilde{C}_{t,s} \in \mathbb{R}^{K_t \times L_s}$ zu lösen. Nach Lemma 5.2.2 (b) ist $\sum_{i=1}^N (W_s^* B_i W_s) \otimes (V_t^* A_i V_t)$ positiv definit, womit die Lösung von (5.10) über eine Cholesky-Zerlegung dieser Matrix zusammen mit der äquivalenten Darstellung

$$\left(\sum_{i=1}^N (W_s^* B_i W_s) \otimes (V_t^* A_i V_t) \right) \text{vec}(S_b) = \text{vec}(\tilde{C}_{t,s})$$

von (5.10) berechnet werden kann (vgl. Lemma 2.2.5).

Wie an dieser Darstellung über das Kronecker-Produkt zu erkennen ist, lässt sich das Gauß-Seidel-Verfahren für das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem als Block-Gauß-Seidel-Verfahren ansehen — siehe z.B. [33, Abschnitt 4.5.2] für eine Definition dieser Blockvariante.

Wie in Kapitel 4 hergeleitet, wird für einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem durch die Menge $\mathcal{L}_{\succ_{(A,B)}}^-$ charakterisiert. Hierbei definiert $\succ_{(A,B)}$ die Matrix-Galerkin-Blockrelation bzgl. A und B in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Algorithmus 5.2.1 führt einen Schritt der Gauß-Seidel-Iteration für eine rechte Seite $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ auf der Menge der Freiheitsgrade $(S_b)_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ durch. $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ entsprechen dabei den beim Assemblieren aller Interaktionsmatrizen aus $\mathcal{L}_{\succ_{(A,B)}}^-$ verwendeten Clusterbasen (vgl. Abschnitt 4.3.3) und $(V_t^* C W_s)_{(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ der rechten Seite des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems. Wie zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, verwenden wir dort die Darstellung der Koeffizienten über Interaktionsmatrizen.

Algorithmus 5.2.1 Ein Schritt des Gauß-Seidel-Verfahrens für das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem $\mathcal{L}_{\succ_{(A,B)}}^-$ bzgl. eines Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, zweier Matrizen $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ sowie der zugehörigen Matrix-Galerkin-Blockrelation $\succ_{(A,B)}$, angewendet auf die Freiheitsgrade $(S_b)_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ und mit rechter Seite $(C_{t,s})_{(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} := (V_t^* C W_s)_{(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ für $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.

```

procedure GAUSS_SEIDEL_STEP( $\mathcal{L}_{\succ_{(A,B)}}^-$ ,  $\iota$ ,  $(S_b)_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ ,  $(C_{t,s})_{(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}$ )
  for  $k = 1$  to  $\#\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$  do
     $b' = (t', s') \leftarrow \iota^{-1}(k)$ 
     $\tilde{C}_{t',s'} \leftarrow C_{t',s'}$ 
    for all  $b = (t, s) \in \text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\succ_{(A,B)}}, b') \setminus \{b'\}$  do
       $\tilde{C}_{t',s'} \leftarrow \tilde{C}_{t',s'} - A_{t',t} S_b (B_{s',s})^*$ 
    end for
     $S_{b'} \leftarrow \text{SOLVE}(A_{t',t'} S_{b'} (B_{s',s'})^* = \tilde{C}_{t',s'})$ 
  end for
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Dieser Algorithmus führt einen Schritt der Gauß-Seidel-Iteration aus. Hierbei bezeichnen $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ die verwendeten Clusterbasen sowie ι eine Abbildung, wie sie in Bemerkung 5.2.1 motiviert wird, um eine totale Ordnung auf der Menge $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ zu induzieren. Die Funktion SOLVE dient als Platzhalter für ein Lösungsverfahren der durch die Diagonale des Gleichungssystems gegebenen Teilprobleme. Hierzu können — unter Erfüllung geeigneter Voraussetzungen der beteiligten Matrizen — Cholesky-Zerlegungen verwendet werden (vgl. Lemma 5.2.2).

Folgendes Lemma liefert eine obere Schranke für den Aufwand von Algorithmus 5.2.1, also für einen Schritt der Gauß-Seidel-Iteration. Wir nehmen hierbei an, dass die zu lösenden Diagonalsysteme über Cholesky-Zerlegungen sowie Vorwärts- und Rückwärts einsetzen aufgelöst werden. Sollte hierfür ein anderes Verfahren verwendet werden, so wären die entsprechenden Voraussetzungen des Lemmas sowie der Aufwand für dieses Lösen im Beweis entsprechend auszutauschen bzw. anzupassen.

5 Lösungsstrategien

Lemma 5.2.4 (Aufwand von Algorithmus 5.2.1). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$, $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ und $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ mit A und B positiv definit sowie $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ zwei Clusterbasen mit Rangverteilungen $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ bzw. $L_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$. Es bezeichne $\prec_{(A,B)}$ die Blockrelation bzgl. A und B in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und der zugehörige Relationsbaum $\mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}$ sei $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}}$ -schwachbesetzt, dann benötigt Algorithmus 5.2.1 mit

$$k_{\max} := \max_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}, s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}} \{\#K_t, \#L_s\}$$

nicht mehr als

$$5(C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}} + 1)k_{\max}^3 \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$$

arithmetische Operationen.

Beweis. Seien $b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie $b = (t, s) \in \text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}, b') \setminus \{b'\}$, dann fallen für die Multiplikation von $A_{t',t} \in \mathbb{R}^{K_{t'} \times K_t}$ mit $S_b \in \mathbb{R}^{K_t \times L_s}$ nicht mehr als $2\#K_{t'}\#K_t\#L_s \leq 2k_{\max}^3$ und analog für die Multiplikation von $A_{t',t}S_b \in \mathbb{R}^{K_{t'} \times L_s}$ mit $(B_{s',s})^* \in \mathbb{R}^{L_s \times L_{s'}}$ nicht mehr als $2\#K_{t'}\#L_s\#L_{s'} \leq 2k_{\max}^3$ arithmetische Operationen an. Hinzu kommen durch die Subtraktion $\hat{C}_{t',s'} - A_{t',t}S_b(B_{s',s})^*$ maximal $k_{\max}^2 \leq k_{\max}^3$ arithmetische Operationen. Pro Durchlauf der inneren Schleife entstehen also höchstens

$$5k_{\max}^3$$

und damit für jeden Durchlauf der äußeren Schleife — ohne das Lösen des dortigen Diagonalsystems — maximal

$$\sum_{b \in \text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}, b') \setminus \{b'\}} 5k_{\max}^3 \leq \sum_{b \in \text{row}^-(\mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}, b')} 5k_{\max}^3 \leq 5C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}} k_{\max}^3 \quad (5.11)$$

arithmetische Operationen.

Da die Voraussetzungen von Lemma 5.2.2 erfüllt sind, existieren die Cholesky-Zerlegungen von $A_{t',t'}$ und $B_{s',s'}$. Mit $A_{t',t'} \in \mathbb{R}^{K_{t'} \times K_{t'}}$ und $B_{s',s'} \in \mathbb{R}^{L_{s'} \times L_{s'}}$ sowie $\#K_{t'} \leq k_{\max}$ und $\#L_{s'} \leq k_{\max}$ benötigt die Berechnung der Cholesky-Zerlegung jeweils nicht mehr als

$$\frac{1}{3}k_{\max}^3 \quad (5.12)$$

arithmetische Operationen. Diese Aussage ist z.B. in [49, Kapitel 3 Abschnitt 2.1] zu finden. Analog zu der Konvention dieser Arbeit werden dort nur Multiplikation und Additionen betrachtet, die in [49, Kapitel 3 Algorithmus 2.1] auftretenden k_{\max} Auswertungen der Wurzelfunktion also ignoriert. In [24, Algorithmus 4.1.1] ist eine allgemeinere Form der Cholesky-Zerlegung angegeben, die ohne die Wurzelfunktion auskommt. Die dort erforderliche Anzahl an arithmetischen Operationen ist — angewendet auf die hier betrachteten Matrizen — ebenfalls durch (5.12) beschränkt.

Für das Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen (vgl. (5.5) bzw. (5.6)) entsteht jeweils ein maximaler Aufwand von

$$2k_{\max}k_{\max}^2 = 2k_{\max}^3 \quad (5.13)$$

arithmetischen Operationen (siehe z.B. [49, Kapitel 3 Abschnitt 1.5]).

Das Lösen des Diagonalsystems erfordert somit insgesamt nicht mehr als

$$\frac{2}{3}k_{\max}^3 + 4k_{\max}^3 \leq 5k_{\max}^3 \quad (5.14)$$

arithmetische Operationen.

Mit (5.11) und (5.14) entsteht insgesamt ein maximaler Aufwand von

$$\begin{aligned} \sum_{b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} (5C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}} k_{\max}^3 + 5k_{\max}^3) &= 5(C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}} + 1)k_{\max}^3 \# \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \\ &\leq 5(C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}} + 1)k_{\max}^3 \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \end{aligned}$$

für Algorithmus 5.2.1, also für einen Schritt des Gauß-Seidel-Verfahrens. \square

Bemerkung 5.2.5 (Allgemeine lineare Matrixgleichung). *Wir betrachten in dieser Bemerkung den Aufwand eines Gauß-Seidel-Schritts für das auf einer allgemeinen linearen Matrixgleichung basierende Matrix-Galerkin-Gleichungssystem. Es seien hierfür die Voraussetzungen von Lemma 5.2.2 (b) gegeben und wir bezeichnen für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ mit $\mathcal{T}_{\prec_{(A_i, B_i)}}$ den auf der Blockrelation $\prec_{(A_i, B_i)}$ — bzgl. A_i und B_i in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ — basierenden Relationsbaum. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass alle diese Relationsbäume C_{sp} -schwachbesetzt sind — also mit dem gleichen $C_{\text{sp}} \in \mathbb{N}$ — und setzen analog zu Lemma 5.2.4*

$$k_{\max} := \max_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}, s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}} \{\#K_t, \#L_s\}.$$

Da das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem für eine allgemeine lineare Matrixgleichung unter Verwendung der (algorithmischen) Schreibweise mit Interaktionsmatrizen die Form

$$\sum_{i=1}^N \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} (A_i)_{t',t} S_b((B_i)_{s',s})^* = V_{t'} C W_{s'} \quad \text{für alle } b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$$

annimmt, entstehen für jeden Durchlauf der äußeren Schleife aus Algorithmus 5.2.1 — ohne das Lösen des Diagonalsystems — maximal

$$\sum_{i=1}^N \sum_{b \in \text{row}_{\mathcal{L}}^-(\mathcal{T}_{\prec_{(A_i, B_i)}}, b') \setminus \{b'\}} 5k_{\max}^3 \leq 5N C_{\text{sp}} k_{\max}^3 \quad (5.15)$$

arithmetische Operationen — vgl. (5.11) aus dem Beweis von Lemma 5.2.4.

Es sind die Voraussetzungen von Lemma 5.2.2 (b) erfüllt, womit für $b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ die Cholesky-Zerlegung von

$$\sum_{i=1}^N (B_i)_{s',s'} \otimes (A_i)_{t',t'} \in \mathbb{R}^{(L_{s'} \times K_{t'}) \times (L_{s'} \times K_{t'})} \quad (5.16)$$

5 Lösungsstrategien

existiert. Für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ entstehen für das Aufstellen von $(B_i)_{s',s'} \otimes (A_i)_{t',t'}$ nicht mehr als

$$k_{\max}^2 k_{\max}^2 = k_{\max}^4$$

arithmetische Operationen — vgl. Bemerkung 2.2.3 über die Darstellung der Einträge des Kronecker-Produkts zweier Matrizen. Damit lässt sich die Matrix aus (5.16) mit einem Aufwand von maximal

$$\sum_{i=1}^N k_{\max}^4 = N k_{\max}^4$$

konstruieren.

Es gilt $\#(L_{s'} \times K_{t'}) \leq k_{\max}^2$, womit die Berechnung der Cholesky-Zerlegung von (5.16) nicht mehr als

$$\frac{1}{3}(k_{\max}^2)^3 = \frac{1}{3}k_{\max}^6$$

und das Auflösen des Diagonalsystems nicht mehr als

$$2(k_{\max}^2)^3 = 2k_{\max}^6$$

arithmetische Operationen erfordert — vgl. (5.12) und (5.13) aus dem Beweis von Lemma 5.2.4. Der Aufwand zur Berechnung einer Lösung des Diagonalsystems lässt sich somit durch

$$N k_{\max}^4 + \frac{1}{3} k_{\max}^6 + 2 k_{\max}^6 \leq N k_{\max}^4 + 3 k_{\max}^6 \quad (5.17)$$

beschränken.

Mit (5.15) und (5.17) entsteht also insgesamt ein maximaler Aufwand von

$$\sum_{b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} (5 N C_{\text{sp}} k_{\max}^3 + N k_{\max}^4 + 3 k_{\max}^6) \leq (5 N C_{\text{sp}} k_{\max}^3 + N k_{\max}^4 + 3 k_{\max}^6) \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \quad (5.18)$$

für einen Schritt des Gauß-Seidel-Verfahrens bei Vorliegen einer allgemeinen linearen Matrixgleichung.

Die Tatsache, dass die Abschätzung (5.18) für $N = 1$ nicht der aus Lemma 5.2.4 entspricht, ist dem Umstand geschuldet, dass das Diagonalsystem dort nicht mit der Cholesky-Zerlegung des Kronecker-Produkts, sondern mit den Zerlegungen der einzelnen Interaktionsmatrizen gelöst wird.

5.3 pcg-Verfahren

Eine Definition sowie ausführliche Analyse des Verfahrens der *konjugierten Gradienten* — auch *cg-Verfahren* genannt (von engl. *conjugate gradient*) — sowie dessen *vorkonditionierte* Variante — auch *pcg-Verfahren* genannt (von engl. *preconditioning*) — ist z.B. in [33, Kapitel 9] zu finden. Für eine allgemeinere Diskussion des Vorkonditionierens linearer Gleichungssysteme, sei auf z.B. [33, Abschnitt 8.3] und [40, Kapitel 10] verwiesen.

Wie zu Beginn dieses Kapitels motiviert, werden wir in diesem Abschnitt die Operator-darstellung eines Matrix-Galerkin-Gleichungssystems verwenden. Dafür seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ wieder ein Blockbaum, $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ zwei Clusterbasen mit Rangverteilungen $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ bzw. $L_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ sowie $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ zwei Matrizen. Wir betrachten den Matrix-Galerkin-Operator \mathcal{G} bzgl. dieser Parameter und bezeichnen den zugrundeliegenden Kopplungsraum bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $L_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ wieder mit \mathcal{V} . Für $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ definieren wir die rechte Seite über $\mathbf{C} := (V_t^* C W_s)_{(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \in \mathcal{V}$ und suchen die Lösung $\mathbf{S} \in \mathcal{V}$ der Operatorgleichung

$$\mathcal{G}(\mathbf{S}) = \mathbf{C}. \quad (5.19)$$

Es sei im Folgenden angenommen, dass \mathcal{G} bzgl. des Kopplungsskalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{F}}$ positiv definit ist, also

$$\langle \mathcal{G}(\mathbf{X}), \mathbf{X} \rangle_{\mathbb{F}} > 0 \quad \text{für alle } \mathbf{X} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$$

gilt. Dies ist gewährleistet, wenn die zugrundeliegende Bilinearform geeignete Eigenschaften erfüllt — vgl. Bemerkung 5.1.5 zusammen mit der Diskussion aus Abschnitt 4.1 (z.B. Lemma 4.1.1). Definieren wir das *Funktional*

$$\mathcal{F} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{X} \mapsto \frac{1}{2} \langle \mathcal{G}(\mathbf{X}), \mathbf{X} \rangle_{\mathbb{F}} - \langle \mathbf{C}, \mathbf{X} \rangle_{\mathbb{F}}, \quad (5.20)$$

so folgt mit [33, Lemma 9.1.1], dass ein $\mathbf{S} \in \mathcal{V}$ die *Minimierungsaufgabe*

$$\mathcal{F}(\mathbf{S}) \rightarrow \min! \quad (5.21)$$

genau dann löst, wenn \mathbf{S} die Gleichung (5.19) erfüllt.

Sowohl im cg- als auch im pcg-Verfahren ist die Grundidee, ausgehend von einer aktuellen Näherung $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{V}$ der gesuchten Lösung eine *Suchrichtung* $\mathbf{P} \in \mathcal{V}$ und eine *optimale Schrittweite* $\lambda_{\text{opt}} \in \mathbb{R}$ so zu bestimmen, dass für die *Korrektur* $\tilde{\mathbf{S}} \boxplus \lambda_{\text{opt}} \boxminus \mathbf{P} \in \mathcal{V}$ die Eigenschaft

$$\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{S}} \boxplus \lambda_{\text{opt}} \boxminus \mathbf{P}) \leq \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{S}} \boxplus \lambda \boxminus \mathbf{P}) \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}$$

gilt. Damit nähern sich die Iterierten der Lösung von (5.21) und somit auch der von (5.19) an. Für diese Betrachtungen sowie die Diskussion hinsichtlich der Wahl von $\mathbf{P} \in \mathcal{V}$ und $\lambda_{\text{opt}} \in \mathbb{R}$ sei auf [33, Abschnitt 9.1.2, 9.3 und 9.4] verwiesen.

Algorithmus 5.3.1 führt das pcg-Verfahren basierend auf der Gleichung (5.19) durch. Nach der Initialisierung der Startwerte wird so lange iteriert, bis der Fehler — dort mit Error bezeichnet — in einem geeigneten Sinne „klein“ ist oder für die aktuelle Suchrichtung $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ gilt (vgl. [33, Remark 9.4.1 (c)]).

Durch die Diskussion über den Aufwand der in Algorithmus 5.3.1 verwendeten Operationen aus Abschnitt 5.1, lässt sich die maximale Anzahl arithmetischer Operationen für einen Schritt des pcg-Verfahrens abschätzen. Hierbei wird die Initialisierungsphase ignoriert, also in Lemma 5.3.1 nur ein Durchlauf der while-Schleife aus Algorithmus 5.3.1 betrachtet.

Lemma 5.3.1 (Aufwand von Algorithmus 5.3.1). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ sowie $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ zwei Clusterbasen mit Rangverteilungen $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ bzw.*

Algorithmus 5.3.1 Lösen des Gleichungssystems $\mathcal{G}(\mathbf{S}) = \mathbf{C}$ zur Bestimmung von $\mathbf{S} \in \mathcal{V}$ für eine gegebenen rechte Seite $\mathbf{C} := (V_t^* C W_s)_{(t,s) \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}} \in \mathcal{V}$ mit $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ durch das pcg-Verfahren. $\mathcal{G} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ bezeichnet hier den Matrix-Galerkin-Operator bzgl. eines Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, zweier Clusterbasen $V_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $W_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ mit Rangverteilungen $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ bzw. $L_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ und zweier Matrizen $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ sowie $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ auf dem zugrundeliegenden Koppelungsraum \mathcal{V} bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $L_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$.

```

procedure PCG_METHOD( $\mathcal{G}, \mathbf{S}, \mathbf{C}, \epsilon$ )
   $\mathbf{R} \leftarrow \mathbf{C} \boxminus \mathcal{G}(\mathbf{S})$ 
   $\mathbf{Q} \leftarrow \text{PRECONDITION}(\mathbf{R})$ 
   $\mathbf{P} \leftarrow \mathbf{Q}$ 
  while Error >  $\epsilon$  and  $\mathbf{P} \neq \mathbf{0}$  do
     $\mathbf{Y} \leftarrow \mathcal{G}(\mathbf{P})$ 
     $\lambda \leftarrow \langle \mathbf{P}, \mathbf{R} \rangle_{\mathbb{F}} / \langle \mathbf{P}, \mathbf{Y} \rangle_{\mathbb{F}}$ 
     $\mathbf{S} \leftarrow \mathbf{S} \boxplus \lambda \boxminus \mathbf{P}$ 
     $\mathbf{R} \leftarrow \mathbf{R} \boxminus \lambda \boxminus \mathbf{Y}$ 
     $\mathbf{Q} \leftarrow \text{PRECONDITION}(\mathbf{R})$ 
     $\mu \leftarrow \langle \mathbf{Q}, \mathbf{Y} \rangle_{\mathbb{F}} / \langle \mathbf{P}, \mathbf{Y} \rangle_{\mathbb{F}}$ 
     $\mathbf{P} \leftarrow \mathbf{Q} \boxminus \mu \boxminus \mathbf{P}$ 
  end while
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Dieser Algorithmus führt nach der Initialisierung von \mathbf{R} , \mathbf{Q} und \mathbf{P} solange Schritte des pcg-Verfahrens aus, bis entweder der Fehler in einem geeigneten Sinne — hier durch den Ausdruck Error charakterisiert — kleiner als eine vorgegebene Schranke $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ist oder für die neue Suchrichtung $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ gilt. Die Funktion PRECONDITION dient hier als Platzhalter für das zum Vorkonditionieren verwendete Verfahren.

$L_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$. Es seien \mathcal{V} der Kopplungsraum und $\mathcal{G} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ der Matrix-Galerkin-Operator bzgl. der entsprechenden Parameter, $\asymp_{(A,B)}$ die Matrix-Galerkin-Blockrelation bzgl. A und B in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie $\mathcal{T}_{\asymp_{(A,B)}}$ der zugehörige Relationsbaum. Des Weiteren sei $\mathcal{T}_{\asymp_{(A,B)}}$ $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\asymp_{(A,B)}}}$ -schwachbesetzt,

$$k_{\max} := \max_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}, s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}} \{\#K_t, \#L_s\}$$

und es existiere ein $C_{\text{pre}}(k_{\max}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}) \in \mathbb{N}$ so, dass die Auswertung der Funktion PRECONDITION nicht mehr als $C_{\text{pre}}(k_{\max}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}})$ arithmetische Operationen erfordert, dann ist der Aufwand eines Durchlaufs der while-Schleife aus Algorithmus 5.3.1 durch

$$(12k_{\max}^2 + 5C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\asymp_{(A,B)}}} k_{\max}^3) \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} + C_{\text{pre}}(k_{\max}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}) + 2$$

beschränkt.

Beweis. Die folgende Tabelle gibt die Anzahl der auftretenden Operationen sowie die oberen Schranken für deren Aufwand nach Lemma 5.1.6 bzw. Bemerkung 5.1.7 an.

Operation	Anzahl	Aufwand pro Operation
$\boxplus, \boxminus, \boxdot$	6	$k_{\max}^2 \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{F}}$	3	$2k_{\max}^2 \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$
Auswertung von \mathcal{G}	1	$5C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\asymp_{(A,B)}}} k_{\max}^3 \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$
PRECONDITION	1	$C_{\text{pre}}(k_{\max}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}})$
Division in \mathbb{R}	2	1

Es entstehen also insgesamt maximal

$$(12k_{\max}^2 + 5C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\asymp_{(A,B)}}} k_{\max}^3) \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} + C_{\text{pre}}(k_{\max}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}) + 2$$

arithmetische Operationen für einen Durchlauf der while-Schleife aus Algorithmus 5.3.1. \square

Bemerkung 5.3.2 (Allgemeine lineare Matrixgleichung). Es seien die Voraussetzungen von Lemma 5.3.1 gegeben, wobei wir anstatt A und B für ein $N \in \mathbb{N}$ die Matrizen $A_i \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B_i \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ betrachten.

In Analogie zu Bemerkung 5.2.5 bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_{\asymp_{(A_i, B_i)}}$ für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ den auf der Blockrelation $\asymp_{(A_i, B_i)}$ — bzgl. A_i und B_i in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ — basierenden Relationsbaum und nehmen an, dass alle diese Bäume C_{sp} -schwachbesetzt seien — also mit dem gleichen $C_{\text{sp}} \in \mathbb{N}$. Das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem lässt sich für $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie $\mathbf{C} := (V_t^* C W_s)_{(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \in \mathcal{V}$ schreiben als

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{G}_i(\mathbf{S}) = \mathbf{C},$$

wobei $\mathbf{S} \in \mathcal{V}$ die zu berechnende Lösung und \mathcal{G}_i für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ den Matrix-Galerkin-Operator bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, A_i , B_i , $V_{\mathcal{I}}$ und $W_{\mathcal{J}}$ bezeichne. Wir nehmen an, dass

die Auswertung der Funktion `PRECONDITION` nicht mehr als $C_{\text{pre},N}(k_{\text{max}}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}) \in \mathbb{N}$ Operationen erfordert.

Im Unterschied zu der Abschätzung aus Lemma 5.3.1 entstehen nun N Auswertungen von Matrix-Galerkin-Operatoren, womit sich in diesem Fall die obere Schranke

$$(12k_{\text{max}}^2 + 5NC_{\text{sp}}k_{\text{max}}^3)\#\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} + C_{\text{pre},N}(k_{\text{max}}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}) + 2$$

für einen Durchlauf der *while*-Schleife aus Algorithmus 5.3.1 ergibt.

5.4 Mehrgitterverfahren

Eine Definition sowie ausführliche Analyse von *Mehrgitterverfahren* ist z.B. in [31] oder [33, Kapitel 10] zu finden. Diese Verfahren basieren auf der Existenz einer *Hierarchie von linearen Gleichungssystemen* (vgl. [33, Abschnitt 10.1.2]), wobei die eigentlich gesuchte Lösung durch die des Gleichungssystems auf der höchsten Stufe beschrieben wird. Typischerweise wird diese Hierarchie durch eine Hierarchie zugrundeliegender Gitter induziert (vgl. z.B. [33, Abschnitt 10.1.2]), worin auch die Bezeichnung *Mehrgitterverfahren* begründet liegt. Das fundamentale Prinzip basiert auf der Tatsache, dass die Gleichungssysteme auf niedrigeren Stufen durch eine geringere Anzahl an Freiheitsgraden schneller/effizienter zu handhaben sind, als die auf höheren Stufen. Lassen sich nun bestimmte — niedrigfrequente — Anteile des Fehlers auf größeren Leveln hinreichend genau darstellen und dort reduzieren, dann ist die Lösung effizient berechenbar. Ein Verfahren, mit dem die, auf größeren Gittern schlechter darstellbaren, hochfrequenten Anteile des Fehlers reduziert werden können, nennt sich *Glätter*. Für eine detailliertere Motivation, sowohl anhand von Beispielen als auch in einem allgemeinen Kontext, sei wieder auf die oben angegebenen Referenzen verwiesen.

Für den Austausch von Informationen zwischen den Hierarchiestufen müssen sich die Gleichungssysteme in geeigneter Weise miteinander „verbinden“ lassen. „Verbinden“ bedeutet hier, dass es möglich sein muss, Informationen durch *Prolongationen* (vgl. [33, Abschnitt 10.1.3]) auf Systeme höherer Stufen sowie durch *Restriktionen* (vgl. [33, Abschnitt 10.1.4]) auf Systeme niedrigerer Stufen zu übertragen. Dies wird häufig durch die *Galerkin-Eigenschaft* — oder auch das *Galerkin-Produkt* (vgl. [33, (10.1.26)]) — beschrieben. Die Galerkin-Eigenschaft besagt, dass entweder der Operator des Gleichungssystems auf einem niedrigen Level direkt oder erst die Prolongation zu dem Gleichungssystem eine Stufe feiner, dann der dortige Operator und anschließend die Restriktion ausgewertet werden können. Durch beide Auswertungen entsteht das gleiche Ergebnis. Dieser Zusammenhang lässt sich unter anderem auch ausnutzen, um ausgehend von dem Gleichungssystem auf der höchsten Hierarchiestufe alle größeren Systeme zu konstruieren — vgl. z.B. [31, Abschnitt 3.7] oder auch mit Abschnitt 5.4.3.

Der vorliegende Abschnitt befasst sich ausschließlich mit einem Mehrgitterverfahren in der *V-Zyklus*-Variante (vgl. z.B. [33, Abschnitt 10.4.]).

In der Terminologie dieser Arbeit ist das einem Matrix-Galerkin-Gleichungssystem zugrundeliegende Gitter durch einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ — bzw. die Menge $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ dessen Blätter — gegeben. Wir werden im Folgenden eine Hierarchie von Blockbäumen einführen

und auf Basis dieser in Abschnitt 5.4.2 die benötigte Hierarchie von Matrix-Galerkin-Gleichungssystemen definieren. Das resultierende Mehrgitterverfahren nennen wir aus diesem Grund auch *Mehrblockverfahren*.

5.4.1 Blockhierarchie

Für die Definition einer Blockhierarchie legen wir einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ zugrunde und nehmen an, dass dieser den Baum auf der höchsten Stufe der Hierarchie definiert. Ausgehend von diesem besteht die Hierarchie dann aus Teilbäumen, deren Wurzeln der von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ entsprechen. Wir setzen also für $\bar{L} \in \mathbb{N}_0$ den Baum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\bar{L})} := \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und charakterisieren eine Hierarchie $(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)})_{\ell=0}^{\bar{L}}$ von Blockbäumen über die beiden Bedingungen

$$\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(0)} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\bar{L}-1)} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\bar{L})} = \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$$

und

$$\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(0)}) = \dots = \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\bar{L}-1)}) = \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\bar{L})}) = \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}).$$

Diese Charakterisierung halten wir in der nachstehenden Definition fest.

Definition 5.4.1 (Blockhierarchie). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum und $\bar{L} \in \mathbb{N}_0$, dann nennen wir ein Tupel $(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)})_{\ell=0}^{\bar{L}}$ von Blockbäumen Blockhierarchie bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, wenn*

$$(i) \quad \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\bar{L})} = \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \text{ sowie}$$

$$(ii) \quad \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}) = \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}) \text{ und } \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)} \text{ für alle } \ell \in \{1, \dots, \bar{L}\}$$

gelten.

Im Zusammenhang mit einem Matrix-Galerkin-Gleichungssystem sind vor allem die Blätter von Blockbäumen von Interesse, da diese alle Freiheitsgrade charakterisieren. Den Zusammenhang dieser Freiheitsgrade einzelner Hierarchiestufen werden wir durch sogenannte *Transferabbildungen* beschreiben.

Aus obiger Definition folgen für alle $\ell \in \{1, \dots, \bar{L}\}$ induktiv die beiden Eigenschaften $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}) = \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}})$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$ einer Blockhierarchie. Insbesondere ist damit für alle $\ell \in \{0, \dots, \bar{L}\}$ und alle $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$ der Ausdruck $\text{sons}^*(b)$ sinnvoll definiert, wobei sons^* hier die Nachfahren von b in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ beschreibt. Des Weiteren folgt aus der Gleichheit der Wurzeln aller Bäume sowie der Definition von Söhnen in Blockbäumen, dass die Sohnabbildung von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ eingeschränkt auf $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$ für $\ell \in \{0, \dots, \bar{L}\}$ der Sohnabbildung in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$ entspricht.

Definition 5.4.2 (Transferabbildung). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum und $(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)})_{\ell=0}^{\bar{L}}$ mit $\bar{L} \in \mathbb{N}_0$ eine Blockhierarchie bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, dann definieren wir für alle $\ell \in \{1, \dots, \bar{L}\}$ die Abbildung*

$$\overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)} : \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}), \quad b \mapsto \text{sons}^*(b) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)} \quad (5.22)$$

von $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}$ in die Potenzmenge von $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$ und nennen diese Transferabbildung von $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}$ nach $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$.

5 Lösungsstrategien

In obiger Definition ist zu beachten, dass für alle $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}$ immer $\overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b) \neq \emptyset$ gilt. Aufgrund der Definition einer Blockhierarchie gilt für alle $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}$ auch $b \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$ und nach Lemma 4.3.25 existiert dann ein Nachfahre b^* von b in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$ mit $b^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$. Gilt bereits $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$, so folgt mit $b \in \text{sons}^*(b)$ insbesondere $\overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b) \neq \emptyset$. Gilt $b \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$, dann folgt aufgrund der Gleichheit der Sohnabbildungen von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ auf dieser Menge auch $b^* \in \text{sons}^*(b) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)} = \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b) \neq \emptyset$.

Über die Transferabbildungen lassen sich nun die Blätter der feineren Hierarchiestufen durch die Blätter der gröberen Stufen beschreiben.

Lemma 5.4.3 (Blockhierarchie). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum und $(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)})_{\ell=0}^{\bar{L}}$ mit $\bar{L} \in \mathbb{N}_0$ eine Blockhierarchie bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, dann gilt*

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)} = \bigcup_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}} \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b) \quad (5.23)$$

für alle $\ell \in \{1, \dots, \bar{L}\}$.

Beweis. Sei $\ell \in \{1, \dots, \bar{L}\}$. Wir zeigen zuerst, dass die Vereinigung auf der rechten Seite von (5.23) disjunkt ist. Seien dafür $b_1, b_2 \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}$ mit $b_1 \neq b_2$, dann gilt insbesondere $b_1, b_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Es existieren nun jeweils Pfade von $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}})$ nach b_1 bzw. b_2 in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Angenommen es gilt $\text{sons}^*(b_1) \cap \text{sons}^*(b_2) \neq \emptyset$, dann existiert für alle $b^* \in \text{sons}^*(b_1) \cap \text{sons}^*(b_2)$ in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Pfad von b_1 nach b^* und ein Pfad von b_2 nach b^* . Setzen wir diese Pfade mit den entsprechenden Pfaden von der Wurzel zu b_1 bzw. b_2 zusammen, würden mit $b_1 \neq b_2$ zwei unterschiedliche Pfade von $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}})$ nach b^* in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ existieren. Dies ist ein Widerspruch zur Baumeigenschaft, womit $\text{sons}^*(b_1) \cap \text{sons}^*(b_2) = \emptyset$ folgt. Insgesamt ergibt sich also

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b_1) \cap \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b_2) &= (\text{sons}^*(b_1) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}) \cap (\text{sons}^*(b_2) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}) \\ &= (\text{sons}^*(b_1) \cap \text{sons}^*(b_2)) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)} \\ &= \emptyset \cap \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)} = \emptyset. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun die Mengengleichheit durch zwei Inklusionen.

„ \supseteq “: Sei $b^* \in \bigcup_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}} \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)$, dann existiert ein $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}$ mit $b^* \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)$, womit $b^* \in \text{sons}^*(b) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$ und damit insbesondere $b^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$ folgt.

„ \subseteq “: Sei $b^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$, dann existiert ein Pfad (b_0^*, \dots, b_n^*) mit $n \in \mathbb{N}_0$ von $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}) = \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)})$ nach b^* in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$. Unter Verwendung von $b^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$ sowie $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$ folgt mit einer Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$ die Existenz eines $n_0 \in \{0, \dots, n\}$ mit $b_{n_0}^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}$. Es gilt also $b^* \in \text{sons}^*(b_{n_0}^*) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$, was $b^* \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b_{n_0}^*)$ und damit

$$b^* \in \bigcup_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}} \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)$$

bedeutet. \square

Das folgende Beispiel gibt die Konstruktion einer konkreten Blockhierarchie an, wie sie später in dem Abschnitt über die numerischen Ergebnisse Verwendung finden wird.

Beispiel 5.4.4 (Blockhierarchie). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $n := \text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}})$ und $\bar{L} \in \mathbb{N}_{\leq n}$. Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\bar{L})} &:= \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \quad \text{und} \\ \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)} &:= \{b \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)} \mid \text{level}(b) < n - (\bar{L} - \ell)\} \quad \text{für alle } \ell \in \{1, \dots, \bar{L}\}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

wobei sich die Funktion level wieder auf den Level in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ bezieht.

Mit $\text{level}(\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}})) = 0$ gilt $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}) = \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}) = \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)})$ sowie nach Konstruktion $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$ für alle $\ell \in \{1, \dots, \bar{L}\}$. Durch (5.24) wird also eine Blockhierarchie $(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)})_{\ell=0}^{\bar{L}}$ bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ definiert. Die größeren Blockbäume entstehen durch Entfernen aller Blätter auf der höchsten Stufe des jeweils feineren Baums. Es folgt somit direkt $\text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}) = \text{depth}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}) - 1$ für alle $\ell \in \{1, \dots, \bar{L}\}$.

Die Transferabbildungen nehmen für alle $\ell \in \{1, \dots, \bar{L}\}$ die Form

$$\overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)} : \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}), \quad b \mapsto \begin{cases} \{b\} & , \text{falls } b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)} \\ \text{sons}(b) & \text{sonst} \end{cases}$$

an. Durch die Wahl $\bar{L} \in \mathbb{N}_{\leq n}$ stellen wir sicher, dass der größte Blockbaum mindestens aus der Wurzel $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}})$ besteht und nicht $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(0)} = \emptyset$ gilt.

5.4.2 Mehrblockverfahren

Basierend auf einer Blockhierarchie im Sinne von Definition 5.4.1 werden wir nun Familien von Matrix-Galerkin-Operatoren sowie Prolongationen und Restriktionen definieren, die als Grundlage des Mehrblockverfahrens dienen werden. Wir befassen uns zuerst mit den beiden letztgenannten Abbildungen.

Prolongation und Restriktion

\mathcal{H}^2 -Matrizen liegen geschachtelte Clusterbasen zugrunde und diese zeichnen sich dadurch aus, dass Clusterbasismatrizen auf niedrigeren Leveln durch Clusterbasismatrizen auf höheren Leveln unter Zuhilfenahme der entsprechenden Transfermatrizen dargestellt werden können (vgl. Definition 3.3.7). Diese Eigenschaft wird im Folgenden verwendet, um in Bezug auf eine Blockhierarchie eine \mathcal{H}^2 -Matrix bzgl. eines Blockbaums mit niedriger Stufe durch eine \mathcal{H}^2 -Matrix bzgl. eines Blockbaums einer höheren Stufe darzustellen. Der Wechsel des einer \mathcal{H}^2 -Matrix zugrundeliegenden Blockbaums führt auf die Definition der im Folgenden verwendeten Prolongationen bzw. Restriktionen.

An der Definition 5.4.2 der Transferabbildungen ist zu erkennen, dass der Übergang von einem Blatt eines größeren Blockbaums zu einem Blatt des nächstfeineren Blockbaums

über die Nachfahren sons^* definiert ist. Es kann also sein, dass i.A. mehr als nur ein Level im Blockbaum „übersprungen“ wird. Wie oben motiviert, kommt den Transfermatrizen der zugrundeliegenden Clusterbasen bei so einem Übergang eine besondere Bedeutung zu. Aus diesem Grund, sowie zur Vermeidung unnötiger Fallunterscheidungen, werden nachstehend *erweiterte Transfermatrizen* eingeführt. Diese Definition orientiert sich an [6, Definition 5.27]. Es lässt sich direkt nachrechnen, dass die im Folgenden verwendete Darstellung äquivalent zu der in [6, Definition 5.27] ist, womit sich die dort bewiesenen Aussagen auf die hier verwendete Definition übertragen lassen.

Definition 5.4.5 (Erweiterte Transfermatrix). *Seien ein Clusterbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und eine geschachtelte Clusterbasis $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ gegeben, dann definieren wir für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $t^* \in \text{sons}^*(t)$ die Matrix $E_{(t^* \blacktriangleright t)} \in \mathbb{R}^{K_{t^*} \times K_t}$ durch*

$$E_{(t^* \blacktriangleright t)} := \begin{cases} E_{t^*} E_{(t^+ \blacktriangleright t)} & , \text{ falls } t^* \neq \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}) \text{ und } t^+ := \text{father}(t^*) \in \text{sons}^*(t), \\ I & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.25)$$

und nennen diese erweiterte Transfermatrix von t^* nach t — oder einfach nur erweiterte Transfermatrix, da durch den Index die Zugehörigkeit zu t^* und t ersichtlich wird.

Mit der Voraussetzung $t^* \in \text{sons}^*(t)$ in obiger Definition, tritt der zweite Fall aus (5.25) genau dann ein, wenn $t^* = t$ gilt. Es ergibt sich die folgende hilfreiche Aussage über die Darstellung von Clusterbasismatrizen.

Lemma 5.4.6 (Erweiterte Transfermatrix). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum und $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ eine geschachtelte Clusterbasis, dann gilt für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $t^* \in \text{sons}^*(t)$ die Gleichheit*

$$\chi_{t^*} V_t = V_{t^*} E_{(t^* \blacktriangleright t)}.$$

Beweis. Siehe [6, Lemma 6.13]. □

Wir werden nun die für die Durchführung des Mehrblockverfahrens benötigten Prolongationen und Restriktionen definieren sowie anschließend einige Eigenschaften beweisen, die z.B. bei dem Nachweis der Galerkin-Eigenschaft von Interesse sein werden. In der folgenden Definition wird verwendet, dass sich die Blätter auf einer feineren Stufe der Blockhierarchie durch die Blätter der nächstgrößeren Stufe unter Verwendung der Transferabbildung darstellen lassen (vgl. Lemma 5.4.3).

Definition 5.4.7 (Prolongation und Restriktion). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $\bar{L} \in \mathbb{N}_0$ und $(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)})_{\ell=0}^{\bar{L}}$ eine Blockhierarchie bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Seien weiter $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $(W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ zwei geschachtelte Clusterbasen sowie $\mathcal{V}^{(\ell)}$ der Kopplungsraum bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$, $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $L_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ für alle $\ell \in \{0, \dots, \bar{L}\}$.*

Für alle $\ell \in \{1, \dots, \bar{L}\}$ definieren wir die Prolongation auf $\mathcal{V}^{(\ell)}$

$$\mathbf{p}^{(\ell)} : \mathcal{V}^{(\ell-1)} \rightarrow \mathcal{V}^{(\ell)}, \quad \mathbf{S} \mapsto \mathbf{p}^{(\ell)}(\mathbf{S})$$

über

$$(\mathbf{p}^{(\ell)}(\mathbf{S}))_{b^*} := E_{(t^* \blacktriangleright t)} S_b F_{(s^* \blacktriangleright s)}^*$$

für alle $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}$ und $b^* = (t^*, s^*) \in \overrightarrow{\text{son}}^{(\ell)}(b)$ sowie die Restriktion auf $\mathcal{V}^{(\ell-1)}$

$$\mathbf{r}^{(\ell)} : \mathcal{V}^{(\ell)} \rightarrow \mathcal{V}^{(\ell-1)}, \quad \mathbf{S} \mapsto \mathbf{r}^{(\ell)}(\mathbf{S})$$

über

$$(\mathbf{r}^{(\ell)}(\mathbf{S}))_b := \sum_{b^* = (t^*, s^*) \in \overrightarrow{\text{son}}^{(\ell)}(b)} E_{(t^* \blacktriangleright t)}^* S_{b^*} F_{(s^* \blacktriangleright s)}$$

für alle $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}$.

Die Prolongationen stehen in einem engen Zusammenhang mit den Koeffizientenisomorphismen aus Definition 5.1.4. Sie sind so konstruiert, dass sich der Isomorphismus auf einer niedrigeren Stufe durch die, im nachstehenden Lemma mit \circ bezeichnete, Hintereinanderausführung der entsprechenden Prolongation mit dem Isomorphismus der nächstfeineren Stufe darstellen lässt. Des Weiteren sind Prolongationen und Restriktionen über das Kopplungsskalarprodukt verbunden. Der eine Operator entspricht gerade dem bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\overline{F}}$ adjungierten Operator des anderen. Diese Aussagen werden wir bei dem Nachweis der Galerkin-Eigenschaft verwenden. Für das Grundprinzip dieser Vorgehensweise sei z.B. auf [33, Abschnitt 10.6.3] und [31, Abschnitt 3.6] verwiesen.

Lemma 5.4.8 (Eigenschaften). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $\bar{L} \in \mathbb{N}_0$ und $(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)})_{\ell=0}^{\bar{L}}$ eine Blockhierarchie bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$. Seien weiter $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $(W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ zwei geschachtelte Clusterbasen, $\mathcal{V}^{(\ell)}$ der Kopplungsraum bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$, $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $L_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ sowie*

$$\mathcal{M}^{(\ell)} := \mathcal{H}^2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}, (V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}, (W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}})$$

für alle $\ell \in \{0, \dots, \bar{L}\}$. Es bezeichne $(\mathfrak{P}^{(\ell)})_{\ell=0}^{\bar{L}}$ die Familie der zugehörigen Koeffizienten-isomorphismen sowie $(\mathfrak{p}^{(\ell)})_{\ell=1}^{\bar{L}}$ die Familie der Prolongationen und $(\mathbf{r}^{(\ell)})_{\ell=1}^{\bar{L}}$ die Familie der Restriktionen, dann gilt für alle $\ell \in \{1, \dots, \bar{L}\}$

$$(a) \quad \mathfrak{P}^{(\ell)} \circ \mathfrak{p}^{(\ell)} = \mathfrak{P}^{(\ell-1)} \quad \text{sowie}$$

$$(b) \quad \text{für alle } \mathbf{X} \in \mathcal{V}^{(\ell-1)} \text{ und } \mathbf{Y} \in \mathcal{V}^{(\ell)} \text{ die Gleichheit}$$

$$\langle \mathfrak{p}^{(\ell)}(\mathbf{X}), \mathbf{Y} \rangle_{\overline{F}} = \langle \mathbf{X}, \mathbf{r}^{(\ell)}(\mathbf{Y}) \rangle_{\overline{F}}.$$

Beweis. Sei $\ell \in \{1, \dots, \bar{L}\}$, dann gilt nach Lemma 5.4.3 die Darstellung

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)} = \dot{\bigcup}_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}} \overrightarrow{\text{son}}^{(\ell)}(b). \quad (5.26)$$

Diese Mengengleichheit werden wir ausnutzen, um \mathcal{H}^2 -Matrizen aus $\mathcal{M}^{(\ell-1)}$ in $\mathcal{M}^{(\ell)}$ darzustellen.

5 Lösungsstrategien

(a) Sei $\mathbf{S} \in \mathcal{V}^{(\ell-1)}$, dann gilt für alle $b^* = (t^*, s^*) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$

$$(\mathbf{p}^{(\ell)}(\mathbf{S}))_{b^*} = E_{(t^* \blacktriangleright t)} S_b F_{(s^* \blacktriangleright s)}^* \in \mathbb{R}^{K_{t^*} \times L_{s^*}},$$

wobei $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}$ derjenige Block mit $b^* \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)$ sei (vgl. (5.26)). Für $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}$ gilt für alle $b^* = (t^*, s^*) \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)$ insbesondere $b^* = (t^*, s^*) \in \text{sons}^*(b)$ und damit $t^* \in \text{sons}^*(t)$ und $s^* \in \text{sons}^*(s)$. Mit Lemma 5.4.6 über die Darstellungen von Clusterbasismatrizen unter Verwendung erweiterter Transfermatrizen folgt somit für alle $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}$

$$\begin{aligned} \sum_{b^*=(t^*, s^*) \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)} V_{t^*}(\mathbf{p}^{(\ell)}(\mathbf{S}))_{b^*} W_{s^*}^* &= \sum_{b^*=(t^*, s^*) \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)} V_{t^*} E_{(t^* \blacktriangleright t)} S_b F_{(s^* \blacktriangleright s)}^* W_{s^*}^* \\ &= \sum_{b^*=(t^*, s^*) \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)} (V_{t^*} E_{(t^* \blacktriangleright t)}) S_b (W_{s^*}^* F_{(s^* \blacktriangleright s)}^*)^* \\ &= \sum_{b^*=(t^*, s^*) \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)} (\chi_{t^*} V_t) S_b (\chi_{s^*} W_s)^* \\ &= \sum_{b^*=(t^*, s^*) \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)} \chi_{t^*} V_t S_b W_s^* \chi_{s^*}. \end{aligned}$$

Nach (5.26) folgt dann

$$\begin{aligned} (\mathfrak{P}^{(\ell)} \circ \mathbf{p}^{(\ell)})(\mathbf{S}) &= \mathfrak{P}^{(\ell)}(\mathbf{p}^{(\ell)}(\mathbf{S})) = \sum_{b^*=(t^*, s^*) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}} V_{t^*}(\mathbf{p}^{(\ell)}(\mathbf{S}))_{b^*} W_{s^*}^* \\ &= \sum_{b=(t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}} \sum_{b^*=(t^*, s^*) \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)} V_{t^*}(\mathbf{p}^{(\ell)}(\mathbf{S}))_{b^*} W_{s^*}^* \\ &= \sum_{b=(t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}} \sum_{b^*=(t^*, s^*) \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)} \chi_{t^*} V_t S_b W_s^* \chi_{s^*}. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Wir zeigen nun für alle $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}$ die Gleichheit

$$V_t S_b W_s^* = \sum_{b^*=(t^*, s^*) \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)} \chi_{t^*} V_t S_b W_s^* \chi_{s^*},$$

womit dann $(\mathfrak{P}^{(\ell)} \circ \mathbf{p}^{(\ell)})(\mathbf{S}) \in \mathcal{M}^{(\ell-1)}$ sowie mit der Definition von $\mathfrak{P}^{(\ell-1)}$ die zu zeigende Gleichheit folgt.

Sei $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}$, dann gilt nach Definition $\overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b) = \text{sons}^*(b) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$, also insbesondere $b^* \in \text{sons}^*(b)$ für alle $b^* \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)$. Für alle $b^* \in \text{sons}^*(b)$ gilt $b \in \text{pred}(b^*)$ und da $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Clusterbaum für die Indexmenge $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ ist, folgt nach Korollar 3.1.4 $\hat{b}^* \subseteq \hat{b}$. Es gilt also

$$\hat{b} \supseteq \bigcup_{b^* \in \text{sons}^*(b) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}} \hat{b}^*, \tag{5.28}$$

wobei sich die Disjunktheit der Vereinigung aus der Disjunktheit aller Blätter in $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$ ergibt (vgl. Korollar 3.2.5).

Wir zeigen nun, dass auch

$$\hat{b} \subseteq \bigcup_{b^* \in \text{sons}^*(b) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}} \hat{b}^* \quad (5.29)$$

gilt und orientieren uns hierfür an dem Beweis von [6, Corollary 3.9].

Sei $(i, j) \in \hat{b}$, dann definieren wir

$$\mathcal{B}_{(i,j)} := \{b^* \in \text{sons}^*(b) \cap \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)} \mid (i, j) \in \hat{b}^*\}.$$

Mit $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$ und $b \in \text{sons}^*(b)$ folgt $b \in \mathcal{B}_{(i,j)}$, also $\mathcal{B}_{(i,j)} \neq \emptyset$. Es sind $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und damit auch $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ endliche Mengen, womit ein $b^* \in \mathcal{B}_{(i,j)}$ mit

$$\text{level}(b^*) = \max\{\text{level}(\tilde{b}) \mid \tilde{b} \in \mathcal{B}_{(i,j)}\}$$

existiert. Angenommen es gilt $b^* \notin \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$, dann muss es aufgrund der Clusterbaumeigenschaft ein $b^{**} \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$ mit $b^{**} \in \text{sons}(b^*)$ und $(i, j) \in \hat{b}^{**}$ geben — hierbei ist die Gleichheit der Sohnabbildungen von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$ in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$ zu beachten. Es folgt dann

$$\text{level}(b^{**}) = \text{level}(b^*) + 1 > \text{level}(b^*)$$

und $b^{**} \in \text{sons}^*(b) \cap \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$, also $b^{**} \in \mathcal{B}_{(i,j)}$. Dies steht im Widerspruch zu der Wahl von b^* , womit $b^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$ folgt.

Wir haben also gezeigt, dass für alle $(i, j) \in \hat{b}$ ein $b^* \in \text{sons}^*(b) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$ mit $(i, j) \in \hat{b}^*$ existiert und somit (5.29) gilt. Zusammen mit (5.28) gilt dann insgesamt

$$\hat{b} = \bigcup_{b^* \in \text{sons}^*(b) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}} \hat{b}^* = \bigcup_{b^* \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)} \hat{b}^*.$$

Unter Verwendung dieser Aussage folgt — mit $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}$ — die Gleichheit

$$\begin{aligned} V_t S_b W_s^* &= \chi_t V_t S_b W_s^* \chi_s = \sum_{(i,j) \in \hat{b} = \hat{t} \times \hat{s}} e_i e_i^* V_t S_b W_s^* e_j e_j^* \\ &= \sum_{b^* = (t^*, s^*) \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)} \sum_{(i,j) \in \hat{b}^* = \hat{t}^* \times \hat{s}^*} e_i e_i^* V_t S_b W_s^* e_j e_j^* \\ &= \sum_{b^* = (t^*, s^*) \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)} \chi_{t^*} V_{t^*} S_{b^*} W_{s^*}^* \chi_{s^*}. \end{aligned}$$

Diese Darstellungen können wir nun in (5.27) einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
 (\mathfrak{P}^{(\ell)} \circ \mathfrak{p}^{(\ell)})(\mathbf{S}) &= \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}} \sum_{b^*=(t^*,s^*) \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)} \chi_{t^*} V_t S_b W_s^* \chi_{s^*} \\
 &= \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}} V_t S_b W_s^* \\
 &= \mathfrak{P}^{(\ell-1)}(\mathbf{S}).
 \end{aligned}$$

Da dies für alle $\mathbf{S} \in \mathcal{V}^{(\ell-1)}$ gilt, erhalten wir die zu beweisende Gleichheit.

(b) Seien $\mathbf{X} \in \mathcal{V}^{(\ell-1)}$ und $\mathbf{Y} \in \mathcal{V}^{(\ell)}$ sowie $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}$ und $b^* = (t^*, s^*) \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)$, dann gilt

$$\langle (\mathfrak{p}^{(\ell)}(\mathbf{X}))_{b^*}, (\mathbf{Y})_{b^*} \rangle_F = \langle E_{(t^* \blacktriangleright t)} X_b F_{(s^* \blacktriangleright s)}^*, Y_{b^*} \rangle_F = \langle X_b, E_{(t^* \blacktriangleright t)}^* Y_{b^*} F_{(s^* \blacktriangleright s)} \rangle_F.$$

Aus (5.26), der Definition des Kopplungsskalarprodukts sowie der Definition der Restriktion folgt

$$\begin{aligned}
 \langle \mathfrak{p}^{(\ell)}(\mathbf{X}), \mathbf{Y} \rangle_{\overline{F}} &= \sum_{b^*=(t^*,s^*) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}} \langle (\mathfrak{p}^{(\ell)}(\mathbf{X}))_{b^*}, (\mathbf{Y})_{b^*} \rangle_F \\
 &= \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}} \sum_{b^*=(t^*,s^*) \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)} \langle (\mathfrak{p}^{(\ell)}(\mathbf{X}))_{b^*}, (\mathbf{Y})_{b^*} \rangle_F \\
 &= \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}} \sum_{b^*=(t^*,s^*) \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)} \langle X_b, E_{(t^* \blacktriangleright t)}^* Y_{b^*} F_{(s^* \blacktriangleright s)} \rangle_F \\
 &= \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}} \left\langle X_b, \sum_{b^*=(t^*,s^*) \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)} E_{(t^* \blacktriangleright t)}^* Y_{b^*} F_{(s^* \blacktriangleright s)} \right\rangle_F \\
 &= \sum_{b=(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}} \langle (\mathbf{X})_b, (\mathfrak{r}^{(\ell)}(\mathbf{Y}))_b \rangle_F \\
 &= \langle \mathbf{X}, \mathfrak{r}^{(\ell)}(\mathbf{Y}) \rangle_{\overline{F}}.
 \end{aligned}$$

□

Mehrblocksysteem

Alle für das Mehrblockverfahren benötigten Größen nennen wir ein *Mehrblocksysteem*. Dieses basiert auf einer Blockhierarchie und besteht neben den Matrix-Galerkin-Operatoren auf allen Leveln aus den Prolongationen sowie Restriktionen, die die Verbindungen der einzelnen Hierarchiestufen abbilden. Diese Verbindungen werden im Anschluss an die folgende Definition durch den Nachweis der Galerkin-Eigenschaft verdeutlicht.

Definition 5.4.9 (Mehrblocksystem). Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ein Blockbaum, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$, $(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)})_{\ell=0}^{\bar{L}}$ mit $\bar{L} \in \mathbb{N}_0$ eine Blockhierarchie bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sowie $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $(W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ zwei geschachtelte Clusterbasen.

Für alle $\ell \in \{0, \dots, \bar{L}\}$ seien $\mathcal{V}^{(\ell)}$ der Kopplungsraum bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$, $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $L_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ sowie $\mathcal{G}^{(\ell)} : \mathcal{V}^{(\ell)} \rightarrow \mathcal{V}^{(\ell)}$ der Matrix-Galerkin-Operator bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$, A , B , $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $(W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$. Des Weiteren seien $\mathbf{p}^{(\ell)} : \mathcal{V}^{(\ell-1)} \rightarrow \mathcal{V}^{(\ell)}$ die Prolongation auf $\mathcal{V}^{(\ell)}$ und $\mathbf{r}^{(\ell)} : \mathcal{V}^{(\ell)} \rightarrow \mathcal{V}^{(\ell-1)}$ die Restriktion auf $\mathcal{V}^{(\ell-1)}$ für alle $\ell \in \{1, \dots, \bar{L}\}$, dann nennen wir das Tripel

$$\left((\mathcal{G}^{(\ell)})_{\ell=0}^{\bar{L}}, (\mathbf{p}^{(\ell)})_{\ell=1}^{\bar{L}}, (\mathbf{r}^{(\ell)})_{\ell=1}^{\bar{L}} \right)$$

Mehrblocksystem bzgl. $(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)})_{\ell=0}^{\bar{L}}$, A , B , $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $(W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$. Falls nicht anders angegeben, setzen wir hierbei im Folgenden implizit voraus, dass bei der Verwendung eines Mehrblocksystems $(\mathcal{V}^{(\ell)})_{\ell=0}^{\bar{L}}$ die Familie der zugrundeliegenden Kopplungsräume darstellt.

Lemma 5.4.10 (Galerkin-Eigenschaft). Seien $(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)})_{\ell=0}^{\bar{L}}$ mit $\bar{L} \in \mathbb{N}_0$ eine Blockhierarchie bzgl. eines Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ zwei Matrizen sowie $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $(W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ zwei geschachtelte Clusterbasen.

Es bezeichne

$$\left((\mathcal{G}^{(\ell)})_{\ell=0}^{\bar{L}}, (\mathbf{p}^{(\ell)})_{\ell=1}^{\bar{L}}, (\mathbf{r}^{(\ell)})_{\ell=1}^{\bar{L}} \right)$$

das Mehrblocksystem bzgl. dieser Parameter, dann gilt für alle $\ell \in \{1, \dots, \bar{L}\}$ die Galerkin-Eigenschaft

$$\mathcal{G}^{(\ell-1)} = \mathbf{r}^{(\ell)} \circ \mathcal{G}^{(\ell)} \circ \mathbf{p}^{(\ell)}.$$

Beweis. Seien $\ell \in \{1, \dots, \bar{L}\}$ und

$$a : \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto \langle AXB^*, Y \rangle_F$$

die dem Matrix-Galerkin-Gleichungssystem bzgl. obiger Parameter zugrundeliegende Bilinearform.

Wir definieren wieder $\mathcal{M}^{(\ell-1)} := \mathcal{H}^2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}, (V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}, (W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}})$ sowie $\mathcal{M}^{(\ell)} := \mathcal{H}^2(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}, (V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}, (W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}})$ und bezeichnen mit $\mathfrak{P}^{(\ell-1)}$ und $\mathfrak{P}^{(\ell)}$ die Koeffizientenmorphismen von $\mathcal{M}^{(\ell-1)}$ bzw. $\mathcal{M}^{(\ell)}$. Nach Bemerkung 5.1.5 und Lemma 5.4.8 gilt für alle $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{V}^{(\ell-1)}$ die Gleichheit

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}^{(\ell-1)}(\mathbf{X}), \mathbf{Y} \rangle_{\mathbb{F}} &= a(\mathfrak{P}^{(\ell-1)}(\mathbf{X}), \mathfrak{P}^{(\ell-1)}(\mathbf{Y})) \\ &= a((\mathfrak{P}^{(\ell)} \circ \mathbf{p}^{(\ell)})(\mathbf{X}), (\mathfrak{P}^{(\ell)} \circ \mathbf{p}^{(\ell)})(\mathbf{Y})) \\ &= \langle (\mathcal{G}^{(\ell)} \circ \mathbf{p}^{(\ell)})(\mathbf{X}), \mathbf{p}^{(\ell)}(\mathbf{Y}) \rangle_{\mathbb{F}} \\ &= \langle (\mathbf{r}^{(\ell)} \circ \mathcal{G}^{(\ell)} \circ \mathbf{p}^{(\ell)})(\mathbf{X}), \mathbf{Y} \rangle_{\mathbb{F}}. \end{aligned}$$

Da dies für alle $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{V}^{(\ell-1)}$ gilt, folgt

$$\mathcal{G}^{(\ell-1)} = \mathbf{r}^{(\ell)} \circ \mathcal{G}^{(\ell)} \circ \mathbf{p}^{(\ell)}.$$

□

Mehrblockverfahren

Wie eingangs dieses Unterkapitels 5.4 erwähnt, werden wir uns auf die Definition eines Mehrgitterverfahrens — hier eines Mehrblockverfahrens — in der V-Zyklus-Variante beschränken. In Algorithmus 5.4.1 ist ein Schritt dieses Verfahrens beschrieben. Die Auswertung des Glätters wird dort durch den Platzhalter SMOOTHING charakterisiert und $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$ sei die Anzahl der verwendeten *Vor-* bzw. *Nachglättungsschritte*.

Wir schätzen nun den Aufwand von Algorithmus 5.4.1 — also eines Schritts des Mehrblockverfahrens — ab. Hierbei wird davon ausgegangen, dass die Koeffizientenmatrizen der Prolongationen und Restriktionen in der durch Definition 5.4.7 gegebenen Form vorliegen. Des Weiteren wird vorausgesetzt, dass alle Matrix-Galerkin-Relationsbäume, die die entsprechenden Matrix-Galerkin-Operatoren auf allen Hierarchiestufen beschreiben, bzgl. des gleichen $C_{\text{sp}} \in \mathbb{N}$ C_{sp} -schwachbesetzt sind. Es ist dabei zu beachten, dass sich eine Blockrelation in einem feineren Blockbaum durch Einschränkung ebenfalls als eine Blockrelation in jedem gröberen Blockbaum der Hierarchie betrachten lässt. Für den Aufwand des LöSENS auf dem größten Level sowie den Aufwand des Glättens wird — in Analogie zur Auswertung des Vorkonditionierers im pcg-Verfahren (vgl. Lemma 5.3.1) — jeweils ein Platzhalter verwendet.

Lemma 5.4.11 (Aufwand von Algorithmus 5.4.1). *Seien $(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)})_{\ell=0}^{\bar{L}}$ mit $\bar{L} \in \mathbb{N}_0$ eine Blockhierarchie bzgl. eines Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ zwei Matrizen sowie $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $(W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ zwei geschachtelte Clusterbasen. Es sei weiter*

$$\left((\mathcal{G}^{(\ell)})_{\ell=0}^{\bar{L}}, (\mathbf{p}^{(\ell)})_{\ell=1}^{\bar{L}}, (\mathbf{r}^{(\ell)})_{\ell=1}^{\bar{L}} \right)$$

das Mehrblocksystem bzgl. obiger Parameter, $\prec_{(A,B)}$ die Matrix-Galerkin-Blockrelation bzgl. A und B in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ — und damit durch Einschränkung auch in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$ für alle $\ell \in \{0, \dots, \bar{L} - 1\}$ — sowie die zugehörigen Relationsbäume $\mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}^{(\ell)}$ für alle $\ell \in \{0, \dots, \bar{L}\}$ $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}}$ -schwachbesetzt. Des Weiteren sei

$$k_{\max} := \max_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}, s \in \mathcal{T}_{\mathcal{J}}} \{\#K_t, \#L_s\}$$

und der Aufwand des LöSENS der Operatorgleichung auf dem Level $\ell = 0$ sei durch $C_{\text{sol}}(k_{\max}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(0)}) \in \mathbb{N}$ sowie der Aufwand der Anwendung des Glätters für alle $\ell \in \{1, \dots, \bar{L}\}$ durch $C_{\text{smo}}(k_{\max}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}) \in \mathbb{N}$ beschränkt, dann benötigt Algorithmus 5.4.1 nicht mehr als

$$\begin{aligned} & \left((5C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}} + 8)k_{\max}^3 + 2k_{\max}^2 \right) \sum_{\ell=1}^{\bar{L}} \#\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)} \\ & + C_{\text{sol}}(k_{\max}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(0)}) + \sum_{\ell=1}^{\bar{L}} (\nu_1 + \nu_2) C_{\text{smo}}(k_{\max}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}) \end{aligned}$$

arithmetische Operationen.

Algorithmus 5.4.1 Ein Schritt des Mehrblockverfahrens für ein mit $\bar{L} \in \mathbb{N}_0$ durch $((\mathcal{G}^{(\ell)})_{\ell=0}^{\bar{L}}, (\mathbf{p}^{(\ell)})_{\ell=1}^{\bar{L}}, (\mathbf{r}^{(\ell)})_{\ell=1}^{\bar{L}})$ gegebenes Mehrblocksystem bzgl. einer Blockhierarchie $(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)})_{\ell=0}^{\bar{L}}$, zweier Matrizen $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ sowie zwei geschachtelter Clusterbasen $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $(W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ zur Berechnung der Lösung von $\mathcal{G}^{(\bar{L})}(\mathbf{S}^{(\bar{L})}) = \mathbf{C}^{(\bar{L})}$ mit rechter Seite $\mathbf{C}^{(\bar{L})} := (V_t^* C W_s)_{(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\bar{L})}} \in \mathcal{V}^{(\bar{L})}$ für $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$.

```

procedure MULTIBLOCK_STEP( $\ell, \mathbf{S}^{(\ell)}, \mathbf{C}^{(\ell)}$ )
  if  $\ell > 0$  then
    for  $i = 1$  to  $\nu_1$  do
      SMOOTHING( $\mathbf{S}^{(\ell)}, \mathbf{C}^{(\ell)}$ )
    end for
     $\mathbf{D}^{(\ell)} \leftarrow \mathcal{G}^{(\ell)}(\mathbf{S}^{(\ell)}) \boxminus \mathbf{C}^{(\ell)}$ 
     $\mathbf{C}^{(\ell-1)} \leftarrow \mathbf{r}^{(\ell)}(\mathbf{D}^{(\ell)})$ 
     $\mathbf{S}^{(\ell-1)} \leftarrow \mathbf{0}$ 
    MULTIBLOCK_STEP( $\ell - 1, \mathbf{S}^{(\ell-1)}, \mathbf{C}^{(\ell-1)}$ )
     $\mathbf{S}^{(\ell)} \leftarrow \mathbf{S}^{(\ell)} \boxplus \mathbf{p}^{(\ell)}(\mathbf{S}^{(\ell-1)})$ 
    for  $i = 1$  to  $\nu_2$  do
      SMOOTHING( $\mathbf{S}^{(\ell)}, \mathbf{C}^{(\ell)}$ )
    end for
  else
     $\mathbf{S}^{(0)} \leftarrow (\mathcal{G}^{(0)})^{-1}(\mathbf{C}^{(0)})$ 
  end if
end procedure

```

Algorithmusbeschreibung. Der initiale Aufruf dieses Algorithmus geschieht mit dem Tripel $(\bar{L}, \mathbf{S}^{(\bar{L})}, \mathbf{C}^{(\bar{L})})$. Gilt $\ell > 0$, so werden $\nu_1 \in \mathbb{N}$ Schritte des Glätters SMOOTHING ausgeführt, dann der Defekt $\mathcal{G}^{(\ell)}(\mathbf{S}^{(\ell)}) \boxminus \mathbf{C}^{(\ell)}$ durch die Restriktion $\mathbf{r}^{(\ell)}$ auf den nächstgrößeren Level transportiert und die Funktion MULTIBLOCK_STEP mit $\ell - 1$ und den entsprechenden Parametern rekursiv aufgerufen. Nach der Rückkehr aus der Rekursion wird $\mathbf{S}^{(\ell)}$ durch die prolongierte Lösung des größeren Levels korrigiert. Es folgen $\nu_2 \in \mathbb{N}$ Anwendungen des Glätters.

Gilt $\ell = 0$, so wird die Matrix-Galerkin-Operatorgleichung — bzw. das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem — exakt gelöst.

5 Lösungsstrategien

Beweis. Sei $\ell \in \{1, \dots, \bar{L}\}$. Wir betrachten zuerst den maximalen Aufwand für die Auswertung der Restriktion $\mathbf{r}^{(\ell)}(\mathbf{D}^{(\ell)})$ und der Prolongation $\mathbf{p}^{(\ell)}(\mathbf{S}^{(\ell-1)})$. Seien hierfür $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}$ und $b^* = (t^*, s^*) \in \overline{\text{son}}^{(\ell)}(b)$, dann erfordern die Multiplikationen

$$E_{(t^* \blacktriangleright t)} S_b^{(\ell-1)} F_{(s^* \blacktriangleright s)}^* \in \mathbb{R}^{K_{t^*} \times L_{s^*}} \quad \text{und} \quad E_{(t^* \blacktriangleright t)}^* D_{b^*}^{(\ell)} F_{(s^* \blacktriangleright s)} \in \mathbb{R}^{K_t \times L_s}$$

jeweils nicht mehr als $2k_{\max}^3 + 2k_{\max}^3 = 4k_{\max}^3$ arithmetische Operation. Nach Lemma 5.4.3 über die Darstellung von $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$ durch $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}$ und $\overline{\text{son}}^{(\ell)}$ ergeben sich für die Auswertung der Prolongation sowie der Restriktion jeweils nicht mehr als

$$\sum_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}} \sum_{b^* \in \overline{\text{son}}^{(\ell)}(b)} 4k_{\max}^3 = \sum_{b^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}} 4k_{\max}^3 = 4k_{\max}^3 \# \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)} \leq 4k_{\max}^3 \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$$

arithmetische Operationen.

Die folgende Tabelle gibt unter Verwendung von Lemma 5.1.6, Bemerkung 5.1.7 und der Voraussetzung, dass $\mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}^{(\ell)}$ für alle $\ell \in \{0, \dots, \bar{L}\}$ $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}}$ -schwachbesetzt ist die Anzahl sowie die oberen Schranken für den Aufwand der in Algorithmus 5.4.1 verwendeten Operationen auf jedem Level $\ell \in \{1, \dots, \bar{L}\}$ an.

Operation	Anzahl	Aufwand pro Operation
\boxminus	2	$k_{\max}^2 \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$
Auswertung von $\mathcal{G}^{(\ell)}$	1	$5C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}} k_{\max}^3 \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$
Auswertung von $\mathbf{p}^{(\ell)}, \mathbf{r}^{(\ell)}$	2	$4k_{\max}^3 \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$
SMOOTHING	$\nu_1 + \nu_2$	$C_{\text{smo}}(k_{\max}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)})$

Unter Vernachlässigung des Levels $\ell = 0$ entsteht somit ein maximaler Aufwand von

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^{\bar{L}} \left(2k_{\max}^2 + 5C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}} k_{\max}^3 + 8k_{\max}^3 \right) \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)} + \sum_{\ell=1}^{\bar{L}} (\nu_1 + \nu_2) C_{\text{smo}}(k_{\max}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}) \\ &= \left((5C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}} + 8)k_{\max}^3 + 2k_{\max}^2 \right) \sum_{\ell=1}^{\bar{L}} \# \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)} + \sum_{\ell=1}^{\bar{L}} (\nu_1 + \nu_2) C_{\text{smo}}(k_{\max}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}). \end{aligned}$$

Hinzu kommen nun noch maximal $C_{\text{sol}}(k_{\max}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(0)})$ arithmetische Operationen für das Lösen von $\mathcal{G}^{(0)}(\mathbf{S}^{(0)}) = \mathbf{C}^{(0)}$ auf Level $\ell = 0$, womit die zu beweisende Aussage folgt. \square

Bemerkung 5.4.12 (Allgemeine lineare Matrixgleichung). *Es seien die Voraussetzungen von Lemma 5.4.11 gegeben, wobei wir wieder (vgl. Bemerkung 5.3.2) anstatt A und B für ein $N \in \mathbb{N}$ die Matrizen $A_i \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B_i \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ betrachten.*

Sei $\ell \in \{0, \dots, \bar{L}\}$, dann bezeichnen wir für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ mit

$$\mathcal{G}_i^{(\ell)} : \mathcal{V}^{(\ell)} \rightarrow \mathcal{V}^{(\ell)}$$

den Matrix-Galerkin-Operator bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$, A_i , B_i sowie der beiden gegebenen Clusterbasen. Mit $\mathbf{C}^{(\bar{L})} := (V_t^* C W_s)_{(t,s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\bar{L})}} \in \mathcal{V}^{(\bar{L})}$ für eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ sind wir an der Lösung $\mathbf{S}^{(\bar{L})} \in \mathcal{V}^{(\bar{L})}$ von

$$\sum_{i=0}^N \mathcal{G}_i^{(\bar{L})}(\mathbf{S}^{(\bar{L})}) = \mathbf{C}^{(\bar{L})}$$

interessiert.

Für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ bezeichnen wir mit $\asymp_{(A_i, B_i)}$ die Matrix-Galerkin-Blockrelation bzgl. A_i und B_i in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ — welche damit durch Einschränkung auch in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$ für alle $\ell \in \{0, \dots, \bar{L}-1\}$ betrachtet werden kann — und nehmen an, dass für alle $i \in \{1, \dots, N\}$ und alle $\ell \in \{0, \dots, \bar{L}\}$ die Relationsbäume $\mathcal{T}_{\asymp_{(A_i, B_i)}}^{(\ell)}$ C_{sp} -schwachbesetzt sind — also mit dem gleichen $C_{\text{sp}} \in \mathbb{N}$.

Des Weiteren nehmen wir an, dass der Aufwand des Lösen der Operatorgleichung

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{G}_i^{(0)}(\mathbf{S}^{(0)}) = \mathbf{C}^{(0)}$$

auf Level $\ell = 0$ durch $C_{\text{sol}, N}(k_{\max}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(0)}) \in \mathbb{N}$ sowie der Aufwand der Anwendung des Glätters für alle $\ell \in \{0, \dots, \bar{L}\}$ durch $C_{\text{smo}, N}(k_{\max}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}) \in \mathbb{N}$ beschränkt ist.

Im Unterschied zu der Abschätzung aus Lemma 5.4.11 entstehen nun auf jedem Level N Auswertungen von Matrix-Galerkin-Operatoren, womit sich in diesem Fall unter Verwendung obiger Annahmen der Aufwand von Algorithmus 5.4.1 durch

$$\begin{aligned} & ((5NC_{\text{sp}} + 8)k_{\max}^3 + 2k_{\max}^2) \sum_{\ell=1}^{\bar{L}} \#\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)} \\ & + C_{\text{sol}, N}(k_{\max}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(0)}) + \sum_{\ell=1}^{\bar{L}} (\nu_1 + \nu_2) C_{\text{smo}, N}(k_{\max}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}) \end{aligned}$$

beschränken lässt.

5.4.3 Assemblieren

Neben dem Matrix-Galerkin-Operator auf dem feinsten Level einer Blockhierarchie benötigen wir für die Durchführung des Mehrblockverfahrens die entsprechenden Operatoren auf allen weiteren Hierarchiestufen. Für einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ sowie zwei geschachtelte Clusterbasen $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $(W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ wurde in Abschnitt 4.3.3 diskutiert, wie alle Koeffizienten des zugehörigen Matrix-Galerkin-Gleichungssystems — und damit auch des entsprechenden Matrix-Galerkin-Operators — assembliert werden können. Für jede weitere Stufe $\ell \in \{0, \dots, \bar{L}-1\}$, $\bar{L} \in \mathbb{N}_0$, einer Blockhierarchie $(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)})_{\ell=0}^{\bar{L}}$ bzgl. $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ ließe sich der zugehörige Operator analog zu dem auf dem feinsten Level $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\bar{L})} = \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ aufstellen. Eine andere Möglichkeit ist die Verwendung der Galerkin-Eigenschaft aus Lemma 5.4.10 (vgl. auch [31, Abschnitt 3.7]).

5 Lösungsstrategien

Es bezeichne

$$((\mathcal{G}^{(\ell)})_{\ell=0}^{\bar{L}}, (\mathbf{p}^{(\ell)})_{\ell=1}^{\bar{L}}, (\mathbf{r}^{(\ell)})_{\ell=1}^{\bar{L}})$$

das Mehrblocksystem bzgl. $(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)})_{\ell=0}^{\bar{L}}$, A , B , $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $(W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$. Wir fixieren ein $\ell \in \{1, \dots, \bar{L}\}$ und nehmen an, dass alle Koeffizienten des Operators $\mathcal{G}^{(\ell)}$ bereits berechnet sind. Nach Lemma 5.4.10 gilt die Galerkin-Eigenschaft

$$\mathcal{G}^{(\ell-1)} = \mathbf{r}^{(\ell)} \circ \mathcal{G}^{(\ell)} \circ \mathbf{p}^{(\ell)}.$$

Für ein $\mathbf{S} \in \mathcal{V}^{(\ell-1)}$ liegt dann das Interesse auf der Darstellung von

$$(\mathcal{G}^{(\ell-1)}(\mathbf{S}))_{b'} = ((\mathbf{r}^{(\ell)} \circ \mathcal{G}^{(\ell)} \circ \mathbf{p}^{(\ell)})(\mathbf{S}))_{b'} \quad (5.30)$$

für alle $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}$, um die Koeffizienten von $\mathcal{G}^{(\ell-1)}$ zu bestimmen. Im Folgenden verwenden wir hierfür wieder die Gleichheit

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)} = \bigcup_{b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}} \overrightarrow{\text{son}}^{(\ell)}(b)$$

aus Lemma 5.4.3 und wenden die Operatoren der rechten Seite von (5.30) nacheinander an. Des Weiteren orientieren wir uns an der Schreibweise der Koeffizienten aller Matrix-Galerkin-Operatoren über Interaktionsmatrizen (vgl. Abschnitt 4.3.3).

Seien $\mathbf{S} \in \mathcal{V}^{(\ell-1)}$ sowie

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &:= \mathbf{p}^{(\ell)}(\mathbf{S}) \in \mathcal{V}^{(\ell)}, \\ \mathbf{Y} &:= \mathcal{G}^{(\ell)}(\mathbf{X}) \in \mathcal{V}^{(\ell)} \\ \text{und } \mathbf{Z} &:= \mathbf{r}^{(\ell)}(\mathbf{Y}) \in \mathcal{V}^{(\ell-1)}, \end{aligned}$$

dann gilt mit (5.30) für alle $b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}$

$$Z_{b'} = (\mathbf{r}^{(\ell)}(\mathbf{Y}))_{b'} = ((\mathbf{r}^{(\ell)} \circ \mathcal{G}^{(\ell)} \circ \mathbf{p}^{(\ell)})(\mathbf{S}))_{b'} = (\mathcal{G}^{(\ell-1)}(\mathbf{S}))_{b'}.$$

Nach Definition der Prolongation gilt für alle $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}$ und $b^* = (t^*, s^*) \in \overrightarrow{\text{son}}^{(\ell)}(b)$

$$X_{b^*} = (\mathbf{p}^{(\ell)}(\mathbf{S}))_{b^*} = E_{(t^* \blacktriangleright t)} S_b F_{(s^* \blacktriangleright s)}^*,$$

womit für alle $b'^* = (t'^*, s'^*) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}$

$$Y_{b'^*} = (\mathcal{G}^{(\ell)}(\mathbf{X}))_{b'^*} = \sum_{b^* = (t^*, s^*) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}} A_{t'^*, t^*} X_{b^*} (B_{s'^*, s^*})^*$$

folgt.

Sei nun $b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
Z_{b'} &= (\mathfrak{r}^{(\ell)}(\mathbf{Y}))_{b'} = \sum_{\substack{b'^*=(t'^*, s'^*) \\ \in \overrightarrow{\text{son}}^{(\ell)}(b')}} E_{(t'^*, \blacktriangleright t')}^* Y_{b'^*} F_{(s'^*, \blacktriangleright s')} \\
&= \sum_{\substack{b'^*=(t'^*, s'^*) \\ \in \overrightarrow{\text{son}}^{(\ell)}(b')}} E_{(t'^*, \blacktriangleright t')}^* \left(\sum_{\substack{b^*=(t^*, s^*) \\ \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}}} A_{t'^*, t^*} X_{b^*} (B_{s'^*, s^*})^* \right) F_{(s'^*, \blacktriangleright s')} \\
&= \sum_{\substack{b'^*=(t'^*, s'^*) \\ \in \overrightarrow{\text{son}}^{(\ell)}(b')}} E_{(t'^*, \blacktriangleright t')}^* \left(\sum_{\substack{b=(t, s) \\ \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}}} \sum_{\substack{b^*=(t^*, s^*) \\ \in \overrightarrow{\text{son}}^{(\ell)}(b)}} A_{t'^*, t^*} X_{b^*} (B_{s'^*, s^*})^* \right) F_{(s'^*, \blacktriangleright s')} \\
&= \sum_{\substack{b'^*=(t'^*, s'^*) \\ \in \overrightarrow{\text{son}}^{(\ell)}(b')}} E_{(t'^*, \blacktriangleright t')}^* \left(\sum_{\substack{b=(t, s) \\ \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}}} \sum_{\substack{b^*=(t^*, s^*) \\ \in \overrightarrow{\text{son}}^{(\ell)}(b)}} A_{t'^*, t^*} E_{(t^*, \blacktriangleright t)} S_b F_{(s^*, \blacktriangleright s)}^* (B_{s'^*, s^*})^* \right) F_{(s'^*, \blacktriangleright s')} \\
&= \sum_{\substack{b=(t, s) \\ \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}}} \sum_{\substack{b'^*=(t'^*, s'^*) \\ \in \overrightarrow{\text{son}}^{(\ell)}(b')}} \sum_{\substack{b^*=(t^*, s^*) \\ \in \overrightarrow{\text{son}}^{(\ell)}(b)}} E_{(t'^*, \blacktriangleright t')}^* A_{t'^*, t^*} E_{(t^*, \blacktriangleright t)} S_b F_{(s^*, \blacktriangleright s)}^* (B_{s'^*, s^*})^* F_{(s'^*, \blacktriangleright s')} \\
&= \sum_{\substack{b=(t, s) \\ \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}}} \sum_{\substack{b'^*=(t'^*, s'^*) \\ \in \overrightarrow{\text{son}}^{(\ell)}(b')}} \sum_{\substack{b^*=(t^*, s^*) \\ \in \overrightarrow{\text{son}}^{(\ell)}(b)}} (E_{(t'^*, \blacktriangleright t')}^* A_{t'^*, t^*} E_{(t^*, \blacktriangleright t)}) S_b (F_{(s'^*, \blacktriangleright s')}^* B_{s'^*, s^*} F_{(s^*, \blacktriangleright s)})^*.
\end{aligned}$$

Damit lassen sich für alle $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}$ und $S_b \in \mathbb{R}^{K_t \times L_s}$ die Koeffizienten von $\mathcal{G}^{(\ell-1)}$ durch die von $\mathcal{G}^{(\ell)}$ über die Darstellung

$$A_{t', t} S_b (B_{s', s})^* = \sum_{\substack{b'^*=(t'^*, s'^*) \\ \in \overrightarrow{\text{son}}^{(\ell)}(b')}} \sum_{\substack{b^*=(t^*, s^*) \\ \in \overrightarrow{\text{son}}^{(\ell)}(b)}} (E_{(t'^*, \blacktriangleright t')}^* A_{t'^*, t^*} E_{(t^*, \blacktriangleright t)}) S_b (F_{(s'^*, \blacktriangleright s')}^* B_{s'^*, s^*} F_{(s^*, \blacktriangleright s)})^*$$

charakterisieren.

Obige Gleichung beschreibt lediglich die Anwendung des Operators auf einer größeren Hierarchiestufe. Sind wir allerdings an der konkreten Berechnung der Koeffizientenmatrizen $A_{t', t}$ und $B_{s', s}$ interessiert, so ist in der speziellen Anwendung die Darstellung der Blockhierarchie sowie die der Transferabbildung $\overrightarrow{\text{son}}^{(\ell)}$ zu untersuchen. Wir diskutieren dies anhand des Beispiels 5.4.4 aus Abschnitt 5.4.1, wie es in dem folgenden Kapitel verwendet wird.

Beispiel 5.4.13 (Blockhierarchie). *Wir betrachten hier die Blockhierarchie $(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)})_{\ell=0}^{\bar{L}}$ aus Beispiel 5.4.4, es gelten also die dortigen Voraussetzungen. Des Weiteren seien $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ zwei Matrizen sowie $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ und $(W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{J}}}$ zwei geschachtelte Clusterbasen. Wir fixieren ein $\ell \in \{1, \dots, \bar{L}\}$ und bezeichnen mit $\mathcal{G}^{(\ell)}$ sowie $\mathcal{G}^{(\ell-1)}$ die Matrix-Galerkin-Operatoren auf den entsprechenden Hierarchiestufen bzgl. obiger Parameter.*

5 Lösungsstrategien

Für alle $b' = (t', s'), b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)}$ und $S_b \in \mathbb{R}^{K_t \times L_s}$ gilt mit der diesem Beispiel vorausgegangen Diskussion

$$A_{t',t} S_b (B_{s',s})^* = \sum_{\substack{b'^* = (t'^*, s'^*) \\ \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b')}} \sum_{\substack{b^* = (t^*, s^*) \\ \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)}} (E_{(t'^* \blacktriangleright t')}^* A_{t'^*, t^*} E_{(t^* \blacktriangleright t)}) S_b (F_{(s'^* \blacktriangleright s')}^* B_{s'^*, s^*} F_{(s^* \blacktriangleright s)})^*$$

und die Transferabbildung nimmt für die hier verwendete Blockhierarchie die Form

$$\overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)} : \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell-1)} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}), \quad b \mapsto \begin{cases} \{b\} & , \text{ falls } b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^{(\ell)}, \\ \text{sons}(b) & \text{sonst} \end{cases}$$

an (vgl. Beispiel 5.4.4). Da wir $\overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b')$ und $\overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)$ zu untersuchen haben, entstehen somit vier mögliche Fälle.

Wir betrachten zuerst den Fall $\overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b') = \text{sons}(b') = \text{sons}^+(t') \times \text{sons}^+(s')$ und $\overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b) = \text{sons}(b) = \text{sons}^+(t) \times \text{sons}^+(s)$, dann gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{b'^* = (t'^*, s'^*) \\ \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b')}} \sum_{\substack{b^* = (t^*, s^*) \\ \in \overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b)}} (E_{(t'^* \blacktriangleright t')}^* A_{t'^*, t^*} E_{(t^* \blacktriangleright t)}) S_b (F_{(s'^* \blacktriangleright s')}^* B_{s'^*, s^*} F_{(s^* \blacktriangleright s)})^* \\ &= \left(\sum_{\substack{t'^* \in \\ \text{sons}^+(t')}} \sum_{\substack{t^* \in \\ \text{sons}^+(t)}} E_{(t'^* \blacktriangleright t')}^* A_{t'^*, t^*} E_{(t^* \blacktriangleright t)} \right) S_b \left(\sum_{\substack{s'^* \in \\ \text{sons}^+(s')}} \sum_{\substack{s^* \in \\ \text{sons}^+(s)}} F_{(s'^* \blacktriangleright s')}^* B_{s'^*, s^*} F_{(s^* \blacktriangleright s)} \right)^*, \end{aligned}$$

womit sich über einen Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} A_{t',t} &= \sum_{t'^* \in \text{sons}^+(t')} \sum_{t^* \in \text{sons}^+(t)} E_{(t'^* \blacktriangleright t')}^* A_{t'^*, t^*} E_{(t^* \blacktriangleright t)} \\ \text{und } B_{s',s} &= \sum_{s'^* \in \text{sons}^+(s')} \sum_{s^* \in \text{sons}^+(s)} F_{(s'^* \blacktriangleright s')}^* B_{s'^*, s^*} F_{(s^* \blacktriangleright s)} \end{aligned}$$

ergibt. In der konkreten Implementierung muss hierbei darauf geachtet werden, welche Form die erweiterten Transfermatrizen annehmen. Diese entsprechen in diesem Fall entweder der normalen Transfermatrix oder der Identitätsmatrix, je nachdem, ob der betrachtete Cluster ein Blatt des Clusterbaums ist oder nicht.

Gilt nun $\overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b') = \{b'\}$ und $\overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b) = \text{sons}(b)$, dann folgt mit einer analogen Betrachtung

$$A_{t',t} = \sum_{t^* \in \text{sons}^+(t)} A_{t',t^*} E_{(t^* \blacktriangleright t)} \quad \text{und} \quad B_{s',s} = \sum_{s^* \in \text{sons}^+(s)} B_{s',s^*} F_{(s^* \blacktriangleright s)}$$

sowie im Fall von $\overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b') = \text{sons}(b')$ und $\overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b) = \{b\}$

$$A_{t',t} = \sum_{t'^* \in \text{sons}^+(t')} E_{(t'^* \blacktriangleright t')}^* A_{t'^*, t} \quad \text{und} \quad B_{s',s} = \sum_{s'^* \in \text{sons}^+(s')} F_{(s'^* \blacktriangleright s')}^* B_{s'^*, s}.$$

In dem verbleibenden Fall $\text{sons}^{(\ell)}(b') = \{b'\}$ und $\overrightarrow{\text{sons}}^{(\ell)}(b) = \{b\}$ werden keine Transfermatrizen benötigt, da die entsprechenden Koeffizientenmatrizen kopiert werden können.

6 Numerische Beispiele

Für die numerischen Beispiele dieses Kapitels bedeutet die Anwendung des Matrix-Galerkin-Verfahrens das Aufstellen (vgl. Abschnitt 4.3.2), das Assemblieren (vgl. Abschnitt 4.3.3) sowie das Lösen (vgl. Kapitel 5) des resultierenden Matrix-Galerkin-Gleichungssystems. Damit die in besagten Abschnitten angegebenen Aufwandsabschätzungen der verwendeten Algorithmen einen in der Anzahl der Freiheitsgrade asymptotisch linearen Aufwand besitzen, müssen einige theoretische Bedingungen erfüllt sein.

Wir betrachten einen Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ sowie die Matrix-Galerkin-Blockrelation $\asymp_{(A,B)}$ bzgl. A und B in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ und bezeichnen die $\asymp_{(A,B)}$ zugrundeliegenden Matrix-Galerkin-Clusterrelationen wieder mit \asymp_A und \asymp_B . Es müssen dann Schwachbesetztheitskonstanten für

1. den Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$,
2. den Blockrelationsbaum $\mathcal{T}_{\asymp_{(A,B)}}$,
3. die Clusterrelationsbäume \mathcal{T}_{\asymp_A} und \mathcal{T}_{\asymp_B} sowie für
4. die Matrizen A und B

existieren. Die Schwachbesetztheit von $\mathcal{T}_{\asymp_{(A,B)}}$ wurde in Abschnitt 4.3.1 untersucht. Dabei ließ sich diese Eigenschaft zum Teil auf die Relationsbäume \mathcal{T}_{\asymp_A} und \mathcal{T}_{\asymp_B} zurückführen (vgl. Korollar 4.3.3 und Lemma 4.3.4). Dort war es allerdings nicht möglich, die Größen

$$C_{L_1, \mathcal{T}_{\asymp_{(A,B)}}} \quad \text{und} \quad C_{L_2, \mathcal{T}_{\asymp_{(A,B)}}}$$

allgemein zu beschränken, da bei Vorliegen von Elementen aus $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ die verwendete Zulässigkeitsbedingung die Struktur dieser Blöcke festlegt (vgl. Bemerkung 4.3.5). Durch die Verwendung konkreter Zulässigkeitsbedingungen in diesem Kapitel kann diese Lücke geschlossen werden.

Die Bedingungen, unter denen eine Lösung der zugrundeliegenden Variationsformulierung existiert und eindeutig ist, wurden in Abschnitt 4.1 untersucht. Diese sind dort durch die Voraussetzungen von Lemma 4.1.2 bzw. Lemma 4.1.4 gegeben. Alle im Folgenden verwendeten Matrizen werden positiv definit sein, was dank Lemma 4.1.1 eine hinreichende Bedingung zur Erfüllung der geforderten Abschätzungen darstellt.

Wir betrachten nun das motivierende Beispiel aus der Einleitung (Abschnitt 1.1). Sei dafür $\Omega \subseteq \mathbb{R}^D$ mit $D \in \mathbb{N}$ ein Gebiet und

$$\mathfrak{L} := - \sum_{i,j=1}^D \frac{\partial}{\partial x_i} \left(c_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad (6.1)$$

6 Numerische Beispiele

ein linearer Differentialoperator, wobei $C : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{D \times D}$ mit

$$C(x) = (c_{ij}(x))_{i,j=1}^D \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

eine Koeffizientenmatrix darstellt. Wie in Kapitel 1 hergeleitet, führt die Diskretisierung der Operatorgleichung $\mathfrak{L}u = f$ für eine rechte Seite $f \in L^2(\Omega)$ mit $V := H_0^1(\Omega)$ auf die kontinuierliche Variationsformulierung

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in V \quad (6.2)$$

zur Bestimmung einer Lösung $u \in V$. Mit einem endlich-dimensionalen Ansatzraum $V_h \subseteq V$ gelangen wir dann zu der Galerkin-Variationsformulierung

$$a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v_h \in V_h, \quad (6.3)$$

um eine Näherungslösung $u_h \in V_h$ von $u \in V$ aus (6.2) zu bestimmen. Die Abbildung $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ beschreibt hierbei eine Bilinearform.

Wie bei der ersten Variante aus der Einleitung sei \mathcal{I} eine geeignete endliche Indexmenge und $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Basis von V_h sowie

$$u_h = \sum_{j \in \mathcal{I}} u_{h,j} \varphi_j$$

die Darstellung der diskreten Lösung als Linearkombination der Basiselemente. Dann führt (6.3) mit $\bar{u}, \bar{f} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ sowie $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$, definiert durch

$$\bar{u}_j := u_{h,j} \quad \text{und} \quad \bar{f}_i := \langle f, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)}$$

sowie

$$a_{ij} := a(\varphi_j, \varphi_i) \quad (6.4)$$

für alle $i, j \in \mathcal{I}$, auf das lineare Gleichungssystem $A\bar{u} = \bar{f}$ zur Berechnung von u_h . Hierbei rückt die Matrixgleichung $AX = I$ in den Fokus.

Im Kontext von Matrix-Galerkin-Relationsbäumen liegt das Interesse auf den Nicht-Null-Einträgen von A . Wie in der Einleitung diskutiert, entstehen diese potentiell nur dort, wo sich Träger von Basisfunktionen überschneiden. Es gilt also

$$a_{ij} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{supp}(\varphi_j) \cap \text{supp}(\varphi_i) \neq \emptyset \quad (6.5)$$

für alle $i, j \in \mathcal{I}$ (vgl. Kapitel 1). Da alle in diesem Kapitel auftretenden Matrizen eine Bedingung der Form (6.5) erfüllen werden, ist diese für die folgenden Betrachtungen von besonderer Bedeutung.

Die Familie $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ stellt durch (6.5) den Bezug zwischen der diskreten Matrix und der kontinuierlichen Aufgabenstellung her. Dieses Bindeglied wird im Folgenden verwendet, um alle auftretenden Matrizen sowie Cluster- und Blockbäume zu beschreiben. Das dort verwendete Attribut „geometrisch“ soll dabei verdeutlichen, dass durch $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ üblicherweise eine Geometrie charakterisiert wird.

Für die nun anschließenden Betrachtungen seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^D$ mit $D \in \mathbb{N}$ ein Gebiet und eine Funktion immer eine Abbildung von Ω nach \mathbb{R} .

6.1 Geometrische Betrachtungen

Wie vorher motiviert, geben die Träger von Funktionen der zur Diskretisierung verwendeten Basis Auskunft über die Nicht-Null-Einträge der entstehenden Matrix. Eine Matrix, deren Einträge so eine Eigenschaft erfüllen, nennen wir *geometrische Matrix*.

Definition 6.1.1 (Geometrische Matrix). *Sei \mathcal{I} eine endliche Indexmenge und $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie von Funktionen, dann nennen wir $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ eine geometrische Matrix bzgl. $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$, wenn*

$$a_{ij} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{supp}(\varphi_j) \cap \text{supp}(\varphi_i) \neq \emptyset$$

für alle $i, j \in \mathcal{I}$ gilt. Ist die zugrundeliegende Familie $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ aus dem Zusammenhang ersichtlich, lassen wir den Zusatz „bzgl. $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ “ auch vereinfachend weg.

Korollar 6.1.2 (Transponierte Matrix). *Sei \mathcal{I} eine endliche Indexmenge, $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie von Funktionen und $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ eine geometrische Matrix bzgl. $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$, dann ist $A^* \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ ebenfalls eine geometrische Matrix bzgl. $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$.*

Beweis. Seien $i, j \in \mathcal{I}$ mit $a_{ij}^* \neq 0$, dann gilt $a_{ji} \neq 0$ und da A eine geometrische Matrix ist, folgt

$$\text{supp}(\varphi_j) \cap \text{supp}(\varphi_i) = \text{supp}(\varphi_i) \cap \text{supp}(\varphi_j) \neq \emptyset,$$

also die Aussage. □

Wir werden nun auch Clusterbäume auf Basis der geometrischen Informationen einer zugrundeliegenden Familie von Funktionen definieren. Die Definition von *geometrischen Clusterbäumen* orientiert sich an [6, Abschnitt 3.3].

Definition 6.1.3 (Geometrischer Clusterbaum). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein Clusterbaum und $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie von Funktionen, dann nennen wir $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ einen geometrischen Clusterbaum bzgl. $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$, wenn allen $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein überdeckender Quader*

$$Q_t := [a_{t,1}, b_{t,1}] \times \cdots \times [a_{t,D}, b_{t,D}] \subseteq \mathbb{R}^D$$

mit $a_{t,i}, b_{t,i} \in \mathbb{R}$ sowie $a_{t,i} < b_{t,i}$ für alle $i \in \{1, \dots, D\}$ und

$$\Omega_t := \bigcup_{i \in \hat{t}} \text{supp}(\varphi_i) \subseteq Q_t$$

zugeordnet ist. Wir identifizieren dann jeden Cluster t mit dem zugehörigen überdeckenden Quader Q_t und nennen diese auch geometrische Cluster. Des Weiteren lassen wir den Zusatz „bzgl. $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ “ vereinfachend weg, wenn die zugrundeliegende Familie $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ aus dem Zusammenhang ersichtlich ist.

Es ist hier zu beachten, dass für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ eines geometrischen Clusterbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ nach obiger Definition immer $Q_t \neq \emptyset$ gilt.

Für die konkrete Konstruktion geometrischer Clusterbäume — also der überdeckenden Quader — in diversen Anwendungsgebieten sei auf [27, 6] sowie auf [42, 43, 44]

6 Numerische Beispiele

verwiesen. In dem hier vorliegenden Fall einer zugrundeliegenden Familie $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ von Funktionen wird diesen Funktionen typischerweise eine Familie von *charakteristischen Punkten* $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ zugeordnet (vgl. [6, Definition 3.21]) und es werden die geometrischen Cluster Q_t so konstruiert, dass

$$x_i \in Q_t \quad \text{für alle } i \in \hat{t}$$

gilt. Hierbei ist die gängige Vorgehensweise rekursiver Natur. Es wird also ein überdeckender Quader

$$Q_r := [a_{r,1}, b_{r,1}] \times \cdots \times [a_{r,D}, b_{r,D}] \subseteq \mathbb{R}^D$$

mit

$$x_i \in Q_r \quad \text{für alle } i \in \mathcal{I} =: \hat{r}$$

gewählt. Dieser stellt die Wurzel des geometrischen Clusterbaums dar. Anschließend ist eine Koordinatenrichtung zu wählen, in die Q_r unterteilt wird. Die Söhne entstehen dann durch die Einordnung der charakteristischen Punkte in die jeweils neu entstandenen überdeckenden Quader. Genauere Betrachtungen sind in obigen Referenzen zu finden.

Im Folgenden werden wir den *Durchmesser* und den *Abstand* von bzw. zwischen zwei geometrischen Clustern benötigen. Wir führen diese Begriffe allgemein für abgeschlossene Mengen ein. Eine konkrete Berechnungsvorschrift des Supremums und Infimums in der nachstehenden Definition im Falle von geometrischen Clustern ist z.B. in [6, Abschnitt 3.3] zu finden.

Definition 6.1.4 (Durchmesser und Abstand). *Seien $Q, \tilde{Q} \subseteq \mathbb{R}^D$ zwei abgeschlossene Mengen, dann nennen wir*

$$\text{diam}(Q) := \sup\{\|x - y\|_2 \mid x, y \in Q\}$$

den Durchmesser von Q und

$$\text{dist}(Q, \tilde{Q}) := \inf\{\|x - y\|_2 \mid x \in Q \text{ und } y \in \tilde{Q}\}$$

den Abstand von Q und \tilde{Q} .

Ist die Clusterstrategie für einen geometrischen Clusterbaum — also die konkrete Konstruktion der Q_t — so geartet, dass die Durchmesser der geometrischen Cluster mit zunehmender Tiefe im Baum mit einer festen Rate abnehmen, dann nennen wir diesen Clusterbaum *geometrisch kontrahierend*.

Definition 6.1.5 (Geometrisch kontrahierend). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein geometrischer Clusterbaum bzgl. einer Familie $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ von Funktionen. Existieren $C_{\text{geo}} \in \mathbb{R}_{>1}$ und $\ell_{\text{geo}} \in \mathbb{N}$ so, dass*

$$\text{diam}(Q_{t^*}) \leq C_{\text{geo}}^{-1} \text{diam}(Q_t)$$

für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $t^ \in \text{sons}^*(t)$ mit $\text{level}(t^*) - \text{level}(t) \geq \ell_{\text{geo}}$ gilt, nennen wir $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ geometrisch kontrahierend bzgl. C_{geo} und ℓ_{geo} .*

Bewegen wir uns also in einem geometrisch kontrahierenden Clusterbaum von einem Cluster ℓ_{geo} Stufen weiter zu dessen Nachfahren, schrumpfen die Durchmesser der überdeckenden Quader mindestens um den Faktor C_{geo}^{-1} . Für Nachfahren, die einen noch höheren Level aufweisen, werden diese Durchmesser dann entsprechend immer kleiner, wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma 6.1.6 (Geometrisch kontrahierend). *Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein geometrischer Clusterbaum bzgl. einer Familie $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ von Funktionen. Des Weiteren sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ geometrisch kontrahierend bzgl. $C_{\text{geo}} \in \mathbb{R}_{>1}$ und $\ell_{\text{geo}} \in \mathbb{N}$, dann gilt für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$*

$$\text{diam}(Q_{t^*}) \leq C_{\text{geo}}^{-i} \text{diam}(Q_t)$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ und alle $t^* \in \text{sons}^*(t)$ mit $\text{level}(t^*) - \text{level}(t) \geq i\ell_{\text{geo}}$.

Beweis. Sei $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$. Wir führen den Beweis per Induktion über $i \in \mathbb{N}$. Sei dazu $t^* \in \text{sons}^*(t)$ mit $\text{level}(t^*) - \text{level}(t) \geq \ell_{\text{geo}}$, dann folgt

$$\text{diam}(Q_{t^*}) \leq C_{\text{geo}}^{-1} \text{diam}(Q_t),$$

da $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ als geometrisch kontrahierend vorausgesetzt ist.

Sei nun $i \in \mathbb{N}$ so gegeben, dass

$$\text{diam}(Q_{t^*}) \leq C_{\text{geo}}^{-i} \text{diam}(Q_t)$$

für alle $t^* \in \text{sons}^*(t)$ mit $\text{level}(t^*) - \text{level}(t) \geq i\ell_{\text{geo}}$ gilt.

Für $t^* \in \text{sons}^*(t)$ mit $\text{level}(t^*) - \text{level}(t) \geq (i+1)\ell_{\text{geo}}$ gilt

$$\text{level}(t^*) \geq (i+1)\ell_{\text{geo}} + \text{level}(t) > \ell_{\text{geo}} + \text{level}(t) \geq \ell_{\text{geo}}.$$

Damit existiert $t^{*+} \in \text{pred}(t^*)$ mit $\text{level}(t^*) - \text{level}(t^{*+}) = \ell_{\text{geo}}$. Seien (t_0^*, \dots, t_n^*) mit $n \in \mathbb{N}_0$ der eindeutige Pfad von $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})$ nach t^* und $(t_0^{*+}, \dots, t_m^{*+})$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ der eindeutige Pfad von $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})$ nach t^{*+} , dann gilt nach Korollar 2.4.18

$$\text{pred}(t^*) = \{t_0^*, \dots, t_n^*\} \quad \text{und} \quad \text{pred}(t^{*+}) = \{t_0^{*+}, \dots, t_m^{*+}\}.$$

Des Weiteren folgt aus $t^{*+} \in \text{pred}(t^*)$ nach Korollar 2.4.16

$$\{t_0^{*+}, \dots, t_m^{*+}\} = \text{pred}(t^{*+}) \stackrel{2.4.16}{\subseteq} \text{pred}(t^*) = \{t_0^*, \dots, t_n^*\}.$$

Es gilt $t^* \in \text{sons}^*(t)$, also $t \in \text{pred}(t^*)$. Wir zeigen nun $\text{level}(t) \leq m$, womit dann $t \in \text{pred}(t^{*+})$ folgt. Aus

$$\text{level}(t^*) - \text{level}(t) \geq (i+1)\ell_{\text{geo}} \geq \ell_{\text{geo}}$$

ergibt sich $\text{level}(t) \leq \text{level}(t^*) - \ell_{\text{geo}}$, was zusammen mit $\text{level}(t^*) - \text{level}(t^{*+}) = \ell_{\text{geo}}$ die Abschätzung

$$\text{level}(t) \leq \text{level}(t^*) - \ell_{\text{geo}} = \text{level}(t^*) - \text{level}(t^*) + \text{level}(t^{*+}) = \text{level}(t^{*+}) = m$$

6 Numerische Beispiele

und somit $t \in \text{pred}(t^{*+})$ bzw. $t^{*+} \in \text{sons}^*(t)$ liefert.

Aufgrund von $\text{level}(t^*) - \text{level}(t^{*+}) = \ell_{\text{geo}}$ gilt

$$\text{diam}(Q_{t^*}) \leq C_{\text{geo}}^{-1} \text{diam}(Q_{t^{*+}}) \quad (6.6)$$

sowie

$$\text{level}(t^{*+}) - \text{level}(t) = \text{level}(t^*) - \ell_{\text{geo}} - \text{level}(t) \geq (i+1)\ell_{\text{geo}} - \ell_{\text{geo}} = i\ell_{\text{geo}}.$$

Die Induktionsvoraussetzung liefert somit

$$\text{diam}(Q_{t^{*+}}) \leq C_{\text{geo}}^{-i} \text{diam}(Q_t)$$

und zusammen mit (6.6) folgt

$$\text{diam}(Q_{t^*}) \leq C_{\text{geo}}^{-1} \text{diam}(Q_{t^{*+}}) \leq C_{\text{geo}}^{-(i+1)} \text{diam}(Q_t),$$

also die Aussage. \square

Betrachten wir für einen geometrischen Clusterbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und eine geometrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ — bzgl. derselben Funktionenfamilie — die Matrix-Galerkin-Clusterrelation \asymp_A bzgl. A in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, dann ergibt sich folgende Eigenschaft zweier in Relation stehenden geometrischen Cluster.

Korollar 6.1.7 (Abstand). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein geometrischer Clusterbaum und $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ eine geometrische Matrix bzgl. einer Familie $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ von Funktionen sowie \asymp_A die Matrix-Galerkin-Clusterrelation bzgl. A in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, dann gilt für alle $t', t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $t' \asymp_A t$*

$$\text{dist}(Q_{t'}, Q_t) = 0.$$

Beweis. Seien $t', t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $t' \asymp_A t$, dann existiert nach Definition $(i, j) \in \hat{t}' \times \hat{t}$ mit $a_{ij} \neq 0$. Da A eine geometrische Matrix ist, folgt

$$\text{supp}(\varphi_j) \cap \text{supp}(\varphi_i) \neq \emptyset,$$

was insbesondere für die Vereinigung der Träger $\Omega_{t'} \cap \Omega_t \neq \emptyset$ und aufgrund von $\Omega_{t'} \subseteq Q_{t'}$ sowie $\Omega_t \subseteq Q_t$

$$\text{dist}(Q_{t'}, Q_t) \leq \text{dist}(\Omega_{t'}, \Omega_t) = 0$$

liefert. \square

An Korollar 6.1.7 ist zu erkennen, dass die Clusterrelation \asymp_A in einem geometrischen Clusterbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und bzgl. einer geometrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ lokale Informationen widerspiegelt. Stehen zwei Cluster in Relation, so besitzen die überdeckenden Quader einen Abstand von Null. Vergleichen wir dies mit dem Charakterisierungslemma 4.2.22, dann beschreiben die unzulässigen Blöcke des auf \asymp_A basierenden Clusterrelationsbaums \mathcal{T}_{\asymp_A} genau diese *Lokalität* der verwendeten Geometrie bzw. Funktionenfamilie.

Betrachten wir $t' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ mit $t' \asymp_A t$ sowie $\text{level}(t') = \text{level}(t)$, dann gilt nach dem Charakterisierungslemma 4.2.22

$$(t', t) \in \mathcal{T}_{\asymp_A}^-.$$

Für alle $t^* \in \text{sons}^*(t)$ mit $t' \asymp_A t^*$ folgt dann — wieder mit dem Charakterisierungslemma — auch $(t', t^*) \in \mathcal{T}_{\asymp_A}^-$ und damit insbesondere $t^* \in \text{row}(\mathcal{T}_{\asymp_A}, t')$. Für \mathcal{T}_{\asymp_A} kann somit keine Schwachbesetztheitskonstante existieren, wenn die Anzahl dieser Nachfahren von t nicht unabhängig von $\#\mathcal{I}$ beschränkt ist — vgl. mit der Diskussion von $C_{U_1, \mathcal{T}_{\asymp_A}}$ in Abschnitt 3.4.1, insbesondere mit Bemerkung 3.4.9.

Motiviert durch diese Betrachtung werden wir eine geometrische Bedingung an die überdeckenden Quader von Clustertupeln aus \mathcal{T}_{\asymp_A} knüpfen. Die Verwendung des Attributs „lokal“ liegt in der vorherigen Diskussion begründet.

Definition 6.1.8 (Lokal geometrisch balanciert). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein geometrischer Clusterbaum und $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ eine geometrische Matrix bzgl. einer Familie $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ von Funktionen sowie \asymp_A die Matrix-Galerkin-Clusterrelation bzgl. A in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und \mathcal{T}_{\asymp_A} der zugehörige Relationsbaum. Existiert $C_{\text{bal}} \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ so, dass*

$$C_{\text{bal}}^{-1} \text{diam}(Q_t) \leq \text{diam}(Q_{t'}) \leq C_{\text{bal}} \text{diam}(Q_t)$$

für alle $(t', t) \in \mathcal{T}_{\asymp_A}^-$ gilt, nennen wir $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ lokal geometrisch balanciert bzgl. C_{bal} und A .

Korollar 6.1.9 (Transponierte Matrix). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein geometrischer Clusterbaum und $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ eine geometrische Matrix bzgl. einer Familie $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ von Funktionen sowie \asymp_A die Matrix-Galerkin-Clusterrelation bzgl. A in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und \mathcal{T}_{\asymp_A} der zugehörige Relationsbaum. Des Weiteren sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ lokal geometrisch balanciert bzgl. $C_{\text{bal}} \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ und A , dann ist $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ auch lokal geometrisch balanciert bzgl. C_{bal} und A^* .*

Beweis. Seien \asymp_{A^*} die Matrix-Galerkin-Clusterrelation bzgl. A^* in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $(t, t') \in \mathcal{T}_{\asymp_{A^*}}^-$. Es gilt dann mit Bemerkung 4.2.31 über die Darstellung des transponierten Relationsbaums unter Verwendung der transponierten Matrix $(t', t) \in \mathcal{T}_{\asymp_A}^-$, also

$$C_{\text{bal}}^{-1} \text{diam}(Q_t) \leq \text{diam}(Q_{t'}) \leq C_{\text{bal}} \text{diam}(Q_t).$$

Hieraus ergibt sich direkt

$$C_{\text{bal}}^{-1} \text{diam}(Q_{t'}) \leq \text{diam}(Q_t) \leq C_{\text{bal}} \text{diam}(Q_{t'}),$$

also die zu beweisende Aussage. □

6.2 Anwendungsbeispiele

Dieser Abschnitt befasst sich nun mit den beiden Matrixgleichungen aus Abschnitt 1.1. Als Differentialoperator wird hierbei der *Laplace-Operator*

$$-\Delta := -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

in \mathbb{R}^2 betrachtet. Des Weiteren werden die entstehenden Matrix-Galerkin-Gleichungssysteme mit dem pcg-Verfahren aus Abschnitt 5.3 gelöst und als Vorkonditionierer das Mehrblockverfahren aus Abschnitt 5.4 in einer *symmetrischen* Form verwendet — vgl. z.B. [33, Abschnitt 10.7] für die Definition von symmetrischen Mehrgitterverfahren. Zum Vorglätten dient hierbei das Gauß-Seidel-Verfahren aus Abschnitt 5.2 und zum Nachglätten das *adjungierte Gauß-Seidel-Verfahren*. Die adjungierte Variante entsteht aus Algorithmus 5.2.1, indem lediglich die Freiheitsgrade — dort also die äußere for-Schleife — in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen werden. Durch diese Anpassung ändert sich an dem Aufwand eines Schritts des Verfahrens nichts. Die Abschätzung der maximalen Anzahl arithmetischer Operationen eines Iterationsschritts (siehe Lemma 5.2.4) behält somit auch für das adjungierte Gauß-Seidel-Verfahren ihre Gültigkeit. Für die Konstruktion der Blockhierarchie wird die Vorgehensweise aus Beispiel 5.4.4 verwendet und das Assemblieren aller Matrix-Galerkin-Operatoren auf den größeren Stufen geschieht über die Galerkin-Eigenschaft (vgl. Beispiel 5.4.13).

Für die folgenden Abschnitte seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet — welches in den entsprechenden Anwendungen konkret angegeben wird — sowie $f \in L^2(\Omega)$ und wir sind an der Lösung $u \in H_0^1(\Omega) = V$ des *Dirichlet-Problems*

$$-\Delta u = f \tag{6.7}$$

mit *homogenen Randbedingungen* interessiert (vgl. z.B. [15, Kapitel II §2]). Die kontinuierliche Variationsformulierung von (6.7) lautet

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in V$$

mit der Bilinearform

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle_2 \, dx$$

(vgl. z.B. [15, Beispiel 2.10]). Durch die Wahl eines endlich-dimensionalen Teilraums $V_h \subseteq V$ ergibt sich die Galerkin-Variationsformulierung

$$a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v_h \in V_h$$

zur Bestimmung einer Näherungslösung $u_h \in V_h$ von $u \in V$. Wir werden nun die in Abschnitt 1.1 vorgestellten Varianten der Wahl von V_h betrachten.

6.2.1 Vorkonditionierer

Die erste Variante der Wahl des Ansatzraums aus Abschnitt 1.1 führt auf ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Näherungslösung $u_h \in V_h$. Im Fokus steht nun die Konstruktion eines Vorkonditionierers für dieses resultierende Gleichungssystem unter Verwendung des Matrix-Galerkin-Verfahrens. Nach der konkreten Definition des Ansatzraums V_h — und der zu betrachtenden Matrixgleichung — wird der in dieser Anwendung verwendete Clusterbaum und der darauf basierende Blockbaum angegeben. Anschließend betrachten wir die benötigten Relationsbäume, konstruieren die zugrundeliegende Clusterbasis und diskutieren das — bis jetzt vernachlässigte — Aufstellen der rechten Seite.

Matrixgleichung

In diesem Abschnitt sei das *Einheitsquadrat* $\Omega := [0, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ als zugrundeliegendes Gebiet fest gewählt. Zur Diskretisierung wird ein Dreiecksgitter verwendet, wobei das *Startgitter* sowie die *globale Verfeinerungsstrategie* in Abbildung 6.1 dargestellt sind.

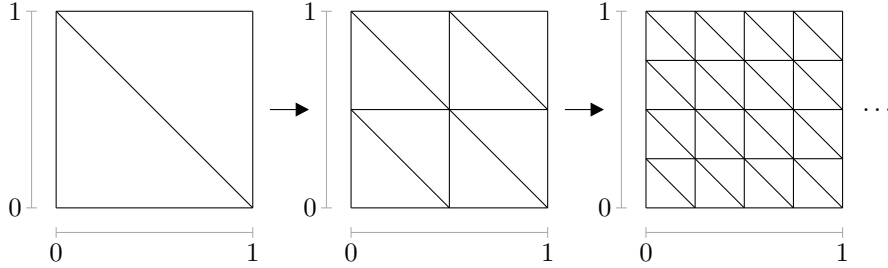


Abbildung 6.1: Startgitter (links) und zwei Schritte der globalen Verfeinerungsstrategie für das Gebiet $\Omega = [0, 1]^2$.

Für eine feste Verfeinerungsstufe sei \mathcal{I} eine geeignete endliche Indexmenge und

$$(x_i)_{i \in \mathcal{I}} \quad (6.8)$$

die Familie aller *inneren Gitterpunkte*. Es sei $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie von Funktionen mit

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $i, j \in \mathcal{I}$, sowie φ_i für alle $i \in \mathcal{I}$ linear auf allen Dreiecken. Es lässt sich direkt nachrechnen, dass $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie von linear unabhängigen Funktionen darstellt. Zur Diskretisierung verwenden wir hier nun den Ansatzraum

$$V_h := \left\{ \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i \varphi_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } i \in \mathcal{I} \right\}.$$

Für die Eigenschaft $V_h \subseteq V$ sei z.B. auf [15] verwiesen.

Wie in der Einleitung dieser Arbeit sowie zu Beginn dieses Kapitels diskutiert, führt die Darstellung

$$u_h = \sum_{j \in \mathcal{I}} u_{h,j} \varphi_j$$

auf das lineare Gleichungssystem

$$A\bar{u} = \bar{f} \quad (6.9)$$

mit

$$\bar{u}_j := u_{h,j}, \quad \bar{f}_i := \langle f, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{und} \quad a_{ij} := a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_{\Omega} \langle \nabla \varphi_j(x), \nabla \varphi_i(x) \rangle_2 dx$$

6 Numerische Beispiele

für alle $i, j \in \mathcal{I}$ zur Berechnung der diskreten Lösung $u_h \in V_h$. Für die Bestimmung eines Vorkonditionierers des linearen Gleichungssystems (6.9) betrachten wir die Matrixgleichung $AX = I$ bzw. etwas ausführlicher geschrieben, die Matrixgleichung

$$AXI = I. \quad (6.10)$$

Aufgrund der Definition des Ansatzraums folgt direkt, dass A $C_{\text{sp},A}$ -schwachbesetzt mit $C_{\text{sp},A} \leq 7$ ist, da sich nur Träger von Basisfunktionen überschneiden, die ein gemeinsames Dreieck beinhalten. Durch den speziellen Fall des hier verwendeten Gitters in Verbindung mit der konkreten Bilinearform lässt sich sogar $C_{\text{sp},A} \leq 5$ zeigen. Für die Identitätsmatrix gilt $\#\text{row}(I, i) = 1 = \#\text{col}(I, j)$ für alle $i, j \in \mathcal{I}$, also ist diese $C_{\text{sp},I}$ -schwachbesetzt mit $C_{\text{sp},I} := 1$. Die positive Definitheit der Identitätsmatrix lässt sich direkt nachrechnen und für die Matrix A ergibt sich diese Eigenschaft aus der Symmetrie und C_k -Koerzivität (vgl. Definition 2.3.1) der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ — siehe hierzu auch [15, 1.5 Poincaré-Friedrichssche Ungleichung]. Damit sind die in Abschnitt 4.1 bewiesenen Aussagen auf die Matrixgleichung (6.10) anwendbar.

Die Einträge der Matrix $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ sind für alle $i, j \in \mathcal{I}$ über

$$a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_{\Omega} \langle \nabla \varphi_j(x), \nabla \varphi_i(x) \rangle_2 dx$$

definiert. Da für $i, j \in \mathcal{I}$ die Inklusionen $\text{supp}(\nabla \varphi_i) \subseteq \text{supp}(\varphi_i)$ sowie $\text{supp}(\nabla \varphi_j) \subseteq \text{supp}(\varphi_j)$ gelten, folgt aus $a_{ij} \neq 0$ direkt

$$\text{supp}(\varphi_j) \cap \text{supp}(\varphi_i) \neq \emptyset.$$

Des Weiteren gilt für die Identitätsmatrix

$$(I)_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und mit $\text{supp}(\varphi_i) \cap \text{supp}(\varphi_i) \neq \emptyset$ für alle $i \in \mathcal{I}$ insbesondere für alle $i, j \in \mathcal{I}$ mit $(I)_{ij} \neq 0$ auch

$$\text{supp}(\varphi_j) \cap \text{supp}(\varphi_i) \neq \emptyset.$$

A und I sind also geometrische Matrizen bzgl. $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$.

Wir werden nun eine approximative Lösung im \mathcal{H}^2 -Matrix-Format von (6.10) mit dem Matrix-Galerkin-Verfahren bestimmen. Hierfür fixieren und analysieren wir zuerst den anschließend verwendeten Cluster- und Blockbaum sowie die das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem beschreibenden Relationsbäume.

Cluster- und Blockbaum

Zur Definition eines zugrundeliegenden geometrischen Clusterbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ werden im Folgenden die Funktionenfamilie $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ sowie die charakteristischen Punkte $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ aus (6.8) verwendet. Die Konstruktion der geometrischen Cluster Q_t für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ erfolgt dabei wie im Anschluss an Definition 6.1.3 skizziert.

Da das verwendete Gitter global verfeinert wird, sind die Punkte $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ regelmäßig in Ω angeordnet. Ein gegebener geometrischer Cluster wird hier immer in die Koordinatenrichtung seiner größten Ausdehnung unterteilt und für die Wurzel sei

$$\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}) := Q_r := [0, 1]^2 = \Omega$$

gewählt. Die rekursive Unterteilung wird abgebrochen, sobald für einen Cluster $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und ein vorgegebenes $n_{\min} \in \mathbb{N}$

$$\#\hat{t} = \#\{x_i \in Q_t \mid i \in \hat{t}\} \leq n_{\min} \quad (6.11)$$

gilt. Diese Cluster bilden somit die Blätter in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$. Für die nun folgenden Betrachtungen in diesem Anwendungsbeispiel sei $n_{\min} := 9$ fest gewählt.

Aufgrund der regelmäßigen Anordnung der charakteristischen Punkte in Ω wird jede Koordinatenrichtung nach zwei Stufen einmal unterteilt worden sein. Aus diesem Grund betrachten wir den Wert

$$\tilde{C}_{\text{geo}} := \min_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} \left\{ \frac{\text{diam}(Q_t)}{\text{diam}(Q_{t^*})} \mid t^* \in \text{sons}^*(t) \text{ mit } \text{level}(t^*) - \text{level}(t) = 2 \right\}. \quad (6.12)$$

Numerische Berechnungen haben gezeigt, dass sich \tilde{C}_{geo} für die hier verwendeten Verfeinerungsstufen — es wurden 225 bis 1046529 Freiheitsgrade gerechnet — in Abhängigkeit der Anzahl an Freiheitsgraden nicht verändert und immer $\tilde{C}_{\text{geo}} \geq 1.5$ gilt. Damit sei der Clusterbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ im Folgenden für die hier verwendeten Verfeinerungsstufen als geometrisch kontrahierend bzgl.

$$C_{\text{geo}} := 1.5 \quad \text{und} \quad \ell_{\text{geo}} := 2$$

angenommen.

Seien \asymp_A und \asymp_I die Matrix-Galerkin-Clusterrelationen bzgl. A bzw. I in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ sowie \mathcal{T}_{\asymp_A} und \mathcal{T}_{\asymp_I} die zugehörigen Relationsbäume. Für den Wert

$$\tilde{C}_{\text{bal},A} := \max_{(t',t) \in \mathcal{T}_{\asymp_A}^-} \frac{\text{diam}(Q_{t'})}{\text{diam}(Q_t)} \quad (6.13)$$

hat sich auch hier in den numerischen Experimenten gezeigt, dass sich $\tilde{C}_{\text{bal},A}$ für alle in diesem Abschnitt verwendeten Verfeinerungsstufen nicht verändert — es wurden ebenfalls 225 bis 1046529 Freiheitsgrade gerechnet — und immer $\tilde{C}_{\text{bal},A} \leq 1.2$ gilt.

Sei $(t', t) \in \mathcal{T}_{\asymp_A}^-$, dann gilt

$$\frac{\text{diam}(Q_{t'})}{\text{diam}(Q_t)} \leq \tilde{C}_{\text{bal},A}$$

und somit $\text{diam}(Q_{t'}) \leq \tilde{C}_{\text{bal},A} \text{diam}(Q_t)$. Unter Verwendung des transponierten Relationsbaums und der Eigenschaft, dass sich dieser über die transponierte Relation darstellen lässt, folgt $(t, t') \in \mathcal{T}_{\asymp_A}^-$. Stellen wir die transponierte Relation nun über die transponierte

6 Numerische Beispiele

Matrix dar (vgl. Bemerkung 4.2.31) und nutzen aus, dass A positiv definit und somit insbesondere symmetrisch ist, folgt $(t, t') \in \mathcal{T}_{\prec_A}^-$. Aus (6.13) ergibt sich also

$$\frac{\text{diam}(Q_t)}{\text{diam}(Q_{t'})} \leq \tilde{C}_{\text{bal},A},$$

was wiederum $\tilde{C}_{\text{bal},A}^{-1} \text{diam}(Q_t) \leq \text{diam}(Q_{t'})$ bedeutet. Es reicht also aus, den Wert in (6.13) zu betrachten, da aufgrund der Symmetrie von A bereits beide in Definition 6.1.8 geforderten Abschätzungen folgen.

Aus der diagonalen Struktur der Identitätsmatrix und der daraus direkt folgenden Eigenschaft $t' = t$ für alle $(t', t) \in \mathcal{T}_{\prec_I}^-$, ergibt sich für

$$\tilde{C}_{\text{bal},I} := \max_{(t',t) \in \mathcal{T}_{\prec_I}^-} \frac{\text{diam}(Q_{t'})}{\text{diam}(Q_t)}$$

immer der Wert $\tilde{C}_{\text{bal},I} = 1.0$ — unabhängig von der Anzahl an Freiheitsgraden. Die Abschätzung nach unten folgt auch hier wie vorher beschrieben. Zusammen mit $\tilde{C}_{\text{bal},A} \leq 1.2$ sei deswegen der Clusterbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ im Folgenden für die hier verwendeten Verfeinerungsstufen als lokal geometrisch balanciert bzgl.

$$C_{\text{bal}} := 1.2$$

und A sowie I angenommen.

Zur Definition des für diese Anwendung verwendeten Blockbaums wählen wir einen *Zulässigkeitsparameter* $\eta \in \mathbb{R}_{>0}$ und definieren die *Standardzulässigkeitsbedingung* über

$$\begin{aligned} (t, s) \text{ zulässig} \\ \Leftrightarrow \\ \max\{\text{diam}(Q_t), \text{diam}(Q_s)\} \leq \eta \text{dist}(Q_t, Q_s) \end{aligned} \tag{6.14}$$

für alle $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ — wobei sich diese Definition auch auf die Verwendung unterschiedlicher Clusterbäume $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ erweitern lässt. Die Bezeichnung „Standardzulässigkeitsbedingung“ liegt darin begründet, dass diese in einem Großteil der \mathcal{H}^2 -Matrix- und in leicht abgewandelter Form in der \mathcal{H} -Matrix-Theorie angewendet wird (vgl. z.B. [6, 27]).

Es sei im Folgenden $\eta := 2.0$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ der bzgl. der Standardzulässigkeitsbedingung (minimal) zulässige Blockbaum für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ als Zeilen- und Spaltenclusterbaum. Die Blätter dieses Baums sind für 961 Freiheitsgrade — dies entspricht einer fünfmaligen globalen Verfeinerung des Startgitters (vgl. Abbildung 6.1) — in Abbildung 6.2 dargestellt und Abbildung 6.3 verdeutlicht die Konstruktion der verwendeten Blockhierarchie. Hierbei sind unzulässige Blätter dunkel markiert. Die dortige Vergrößerung wird abgebrochen, sobald der Baum aus nur einem einzigen Block besteht. Für eine Untersuchung, dass eine Approximation der Lösung von (6.10) im \mathcal{H}^2 -Matrix-Format in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ darstellbar ist, sei auf [6, Abschnitt 9.4] verwiesen.

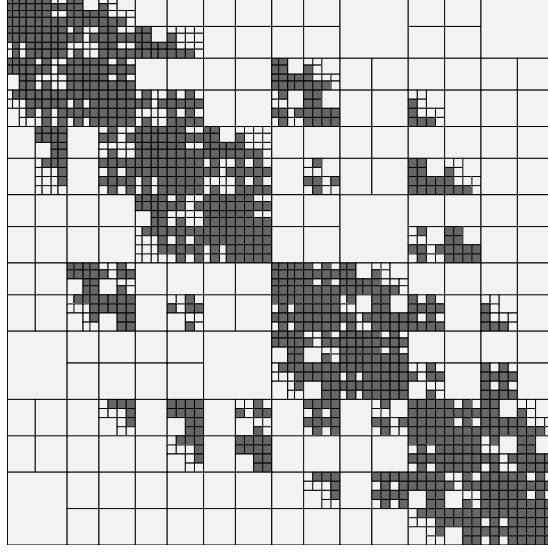


Abbildung 6.2: Bzgl. der Standardzulässigkeitsbedingung zulässiger Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ mit Zulässigkeitsparameter $\eta = 2.0$ und $\#\mathcal{I} = 961$.

Die allgemeine Analyse von Schwachbesetztheitskonstanten geometrischer Blockbäume im Kontext einer zugrundeliegenden Diskretisierung durch finite Elemente hängt stark von dem verwendeten Gitter — bzw. der verwendeten Verfeinerungsroutine — ab und ist Gegenstand aktueller Forschung. Eine Diskussion hinsichtlich einer leicht abgewandelten Zulässigkeitsbedingung sowie Konstruktion des Blockbaums ist z.B. in [27] und [35, Abschnitt 6.4] zu finden. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit erfolgt lediglich eine numerische Untersuchung dieser Größe. Tabelle 6.1 zeigt, wie sich der Wert

$$\tilde{C}_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}} := \max_{t, s \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} \{ \# \text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}, t), \# \text{col}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}, s) \}$$

in Abhängigkeit der Anzahl an Freiheitsgraden verhält. Es lässt sich dort ablesen, dass der

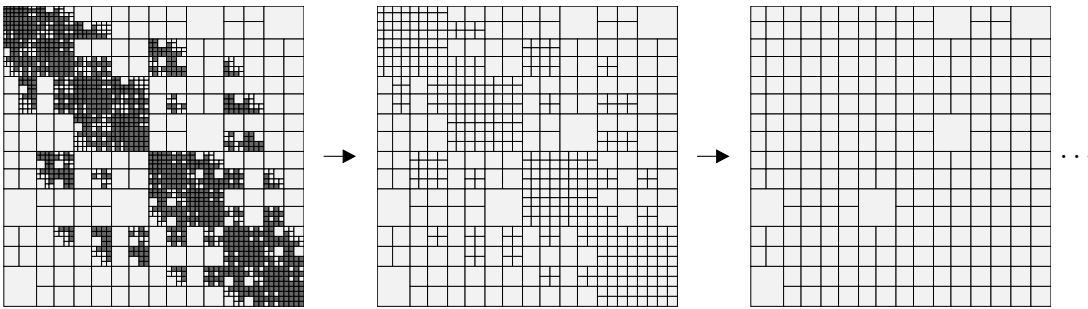


Abbildung 6.3: Drei Schritte der Vergröberung aus Beispiel 5.4.4 für den Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$.

6 Numerische Beispiele

Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ für die hier betrachteten Verfeinerungsstufen $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}}$ -schwachbesetzt ist mit $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}} \leq 42$.

$\#\mathcal{I}$	$\tilde{C}_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}}$
225	30
961	42
3969	42
16129	42
65025	42
261121	42
1046529	42

Tabelle 6.1: $\tilde{C}_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}}$ für verschiedene Verfeinerungsstufen.

Relationsbäume

Wir bezeichnen mit \asymp_A und \asymp_I wieder die Matrix-Galerkin-Clusterrelation bzgl. A bzw. I in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und befassen uns zuerst mit der Schwachbesetztheit der Clusterrelationsbäume \mathcal{T}_{\asymp_A} sowie \mathcal{T}_{\asymp_I} . Das nachstehende Lemma zeigt, dass diese Clusterrelationsbäume als Teilbäume des im vorherigen Abschnitt definierten Blockbaums $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ aufgefasst werden können. Wir formulieren die folgende Aussage allgemein, um diese auch im zweiten Anwendungsbeispiel (Abschnitt 6.2.2) verwenden zu können.

Lemma 6.2.1 (Teilbaum). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein geometrischer Clusterbaum und $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ eine geometrische Matrix bzgl. einer Familie $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ von Funktionen sowie \asymp_A die Matrix-Galerkin-Clusterrelation bzgl. A in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$. Des Weiteren sei $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ der bzgl. der Standardzulässigkeitsbedingung (6.14) mit Zulässigkeitsparameter $\eta \in \mathbb{R}_{>0}$ zulässige Blockbaum für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ als Zeilen- sowie Spaltenclusterbaum, dann ist der Relationsbaum \mathcal{T}_{\asymp_A} ein Teilbaum von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$.*

Beweis. Es gilt

$$\text{root}(\mathcal{T}_{\asymp_A}) = (\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}), \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})) = \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}),$$

womit die Wurzeln der beiden Blockbäume übereinstimmen. Wir zeigen nun, dass $\mathcal{T}_{\asymp_A} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ gilt, womit — aufgrund der Definition der Söhne in beiden Bäumen — \mathcal{T}_{\asymp_A} einen Teilbaum von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ darstellt.

Sei $(t', t) \in \mathcal{T}_{\asymp_A}$. Da die Wurzeln beider Bäume übereinstimmen, setzen wir $(t', t) \neq \text{root}(\mathcal{T}_{\asymp_A})$ voraus. Es existiert dann ein Pfad

$$((t'_0, t_0), \dots, (t'_n, t_n))$$

mit $n \in \mathbb{N}$ von $\text{root}(\mathcal{T}_{\asymp_A})$ nach (t', t) in \mathcal{T}_{\asymp_A} — aufgrund von $(t', t) \neq \text{root}(\mathcal{T}_{\asymp_A})$ gilt $n \geq 1$. Sei $i \in \{0, \dots, n-1\}$, dann ist (t'_i, t_i) unzulässig, womit $t'_i \asymp_A t_i$ folgt. Korollar 6.1.7 liefert somit

$$\text{dist}(Q_{t'_i}, Q_{t_i}) = 0.$$

Aufgrund von $\text{diam}(Q_{t'_i}) \neq 0 \neq \text{diam}(Q_{t_i})$ folgt

$$\max\{\text{diam}(Q_{t'_i}), \text{diam}(Q_{t_i})\} > \eta \text{dist}(Q_{t'_i}, Q_{t_i})$$

und damit die Unzulässigkeit von (t'_i, t_i) im Sinne der Standardzulässigkeitsbedingung.

Dies gilt für alle $i \in \{0, \dots, n-1\}$ und da die Wurzeln von \mathcal{T}_{\prec_A} und $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ sowie die Konstruktion der Söhne übereinstimmen, ist

$$((t'_0, t_0), \dots, (t'_n, t_n))$$

ein Pfad von $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}})$ nach (t', t) in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$. Es folgt $(t', t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und damit die Aussage. \square

Die Aussage des Lemmas 6.2.1 lässt sich nun auf die hier betrachteten Clusterrelationsbäume \mathcal{T}_{\prec_A} und \mathcal{T}_{\prec_I} anwenden, da $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein geometrischer Clusterbaum bzgl. $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ ist und A sowie I geometrische Matrizen bzgl. $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ darstellen. Die Existenz einer Schwachbesetztheitskonstante für $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ (vgl. Tabelle 6.1) impliziert somit, dass \mathcal{T}_{\prec_A} sowie \mathcal{T}_{\prec_I} bzgl. derselben Konstante schwachbesetzt sind.

Bemerkung 6.2.2 (Verbesserte Abschätzung). *Die oben hergeleitete Schwachbesetztheitskonstante für den Relationsbaum \mathcal{T}_{\prec_I} kann unter Umständen etwas zu groß sein. Aufgrund der strukturellen Einfachheit der Identitätsmatrix lässt sich zeigen, dass \mathcal{T}_{\prec_I} mit*

$$C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_I}} \leq C_{\text{sons}}$$

$C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\prec_I}}$ -schwachbesetzt ist, wobei $C_{\text{sons}} := \max_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} \# \text{sons}(t) \geq 1$ sei. Wir betrachten hierzu einen Cluster $t' \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$. Gilt $t' = \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})$, dann folgt nach Konstruktion

$$\text{row}(\mathcal{T}_{\prec_I}, t') = \{\text{root}(\mathcal{T}_{\prec_I})\},$$

also $\# \text{row}(\mathcal{T}_{\prec_I}, t') = 1 \leq C_{\text{sons}}$. Seien nun $t' \neq \text{root}(\mathcal{T}_{\prec_I})$ und $t \in \text{row}(\mathcal{T}_{\prec_I}, t')$, dann gilt $(t', t) \neq \text{root}(\mathcal{T}_{\prec_I})$. Es existiert somit der Vater $(t'^+, t^+) := \text{father}((t', t)) \in \mathcal{T}_{\prec_I}$, welcher unzulässig sein muss. Dies liefert $t'^+ \prec_I t^+$, also die Existenz von $(i, j) \in \hat{t}'^+ \times \hat{t}^+$ mit $(I)_{ij} \neq 0$. Damit folgt $i = j$ und $i \in \hat{t}'^+ \cap \hat{t}^+$. Nach Lemma 3.1.5 gilt dann $t^+ \in \text{pred}(t'^+)$ oder $t'^+ \in \text{pred}(t^+)$. Aufgrund der Konstruktion eines Blockbaums kann dies nur erfüllt sein, wenn $t^+ = t'^+$ gilt. Insbesondere folgen dann $t'^+ = \text{father}(t')$ und $\text{row}(\mathcal{T}_{\prec_I}, t') \subseteq \text{sons}(\text{father}(t'))$ sowie

$$\# \text{row}(\mathcal{T}_{\prec_I}, t') \leq \# \text{sons}(\text{father}(t')) \leq C_{\text{sons}}.$$

Analog ergibt sich diese Aussage für die Blockspalten.

Wir betrachten nun den Matrix-Galerkin-Blockrelationsbaum $\mathcal{T}_{\prec_{(A, I)}}$ mit der zugrundeliegenden Matrix-Galerkin-Blockrelation $\prec_{(A, I)}$. Damit sowohl das Aufstellen sowie das Assemblieren des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems einen in der Anzahl der Freiheitsgrade asymptotisch linearen Aufwand aufweisen, muss die Schwachbesetztheit von

6 Numerische Beispiele

$\mathcal{T}_{\prec(A,I)}$ untersucht werden. Hierbei werden wir diese Eigenschaft — wie für die Clusterrelationsbäume (vgl. Lemma 6.2.1) — auch auf die Schwachbesetztheit des zugrundeliegenden Blockbaums zurückführen.

Wie zu Beginn dieses Kapitels beschrieben — bzw. in Bemerkung 4.3.5 erwähnt —, muss für alle *zulässigen* Blätter $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^+$ und alle $b \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\prec(A,I)}, b')$ die Größe

$$L_1(\mathcal{T}_{\prec(A,I)}, (b', b)) = \max_{b^* \in U_1(\mathcal{T}_{\prec(A,I)}, (b', b))} \text{level}(b^*) - \text{level}(b')$$

mit

$$U_1(\mathcal{T}_{\prec(A,I)}, (b', b)) = \{b^* \in \text{sons}^*(b) \mid (b', b^*) \in \mathcal{T}_{\prec(A,I)} \setminus \mathcal{L}_{\prec(A,I)}\}$$

sowie für alle *zulässigen* Blätter $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^+$ und alle $b' \in \text{col}^=(\mathcal{T}_{\prec(A,I)}, b)$ die Größe

$$L_2(\mathcal{T}_{\prec(A,I)}, (b', b)) = \max_{b'^* \in U_2(\mathcal{T}_{\prec(A,I)}, (b', b))} \text{level}(b'^*) - \text{level}(b)$$

mit

$$U_2(\mathcal{T}_{\prec(A,I)}, (b', b)) = \{b'^* \in \text{sons}^*(b') \mid (b'^*, b) \in \mathcal{T}_{\prec(A,I)} \setminus \mathcal{L}_{\prec(A,I)}\}$$

beschränkt werden.

Dies wird im Folgenden wieder allgemein diskutiert, um die entsprechende Aussage — bzw. einen Teil davon — auch im nächsten Anwendungsbeispiel (Abschnitt 6.2.2) verwenden zu können. Im nachstehenden Lemma wird das Aufrunden einer reellen Zahl auf die nächstgrößere natürliche Zahl durch die *Gaußklammer* $\lceil \cdot \rceil$ beschrieben.

Lemma 6.2.3 (Beschränktheit). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein geometrischer Clusterbaum bzgl. einer Funktionenfamilie $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$, $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ ein geometrischer Clusterbaum bzgl. einer Funktionenfamilie $(\psi_j)_{j \in \mathcal{J}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ der bzgl. der Standardzulässigkeitsbedingung (6.14) mit Zulässigkeitsparameter $\eta \in \mathbb{R}_{>0}$ zulässige Blockbaum für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$. Des Weiteren seien $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ geometrische Matrizen bzgl. $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ bzw. $(\psi_j)_{j \in \mathcal{J}}$, $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ geometrisch kontrahierend bzgl. $C_{\text{geo}} \in \mathbb{R}_{>1}$ und $\ell_{\text{geo}} \in \mathbb{N}$ sowie lokal geometrisch balanciert bzgl. $C_{\text{bal}} \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ und A bzw. B .*

Für den Blockrelationsbaum $\mathcal{T}_{\prec(A,B)}$ mit der zugrundeliegenden Matrix-Galerkin-Blockrelation $\prec_{(A,B)}$ bzgl. A und B in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gilt mit

$$\ell_{\max} := \left\lceil \log_{C_{\text{geo}}} ((1 + 2\eta)C_{\text{bal}}) \right\rceil \ell_{\text{geo}} \in \mathbb{N}$$

(a) *für alle $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ und $b \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\prec(A,B)}, b')$*

$$L_1(\mathcal{T}_{\prec(A,B)}, (b', b)) \leq \max \{ \ell_{\max} + C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}, \ell_{\max} + C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \}$$

und

(b) *für alle $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ und $b' \in \text{col}^=(\mathcal{T}_{\prec(A,B)}, b)$*

$$L_2(\mathcal{T}_{\prec(A,B)}, (b', b)) \leq \max \{ \ell_{\max} + C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}, \ell_{\max} + C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \}.$$

Beweis. (a) Seien $b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ und $b \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\prec(A,B)}, b')$, dann gilt nach Definition

$$L_1(\mathcal{T}_{\prec(A,B)}, (b', b)) = \max_{b^* \in U_1(\mathcal{T}_{\prec(A,B)}, (b', b))} \text{level}(b^*) - \text{level}(b')$$

mit

$$U_1(\mathcal{T}_{\prec(A,B)}, (b', b)) = \{b^* \in \text{sons}^*(b) \mid (b', b^*) \in \mathcal{T}_{\prec(A,B)} \setminus \mathcal{L}_{\prec(A,B)}\}. \quad (6.15)$$

Gilt $U_1(\mathcal{T}_{\prec(A,B)}, (b', b)) = \emptyset$, dann folgt nach Bemerkung 3.4.19 $L_1(\mathcal{T}_{\prec(A,B)}, (b', b)) = -1$ und da $\ell_{\max} + C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \geq -1$ sowie $\ell_{\max} + C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \geq -1$ gelten, folgt die Aussage. Es gelte also $U_1(\mathcal{T}_{\prec(A,B)}, (b', b)) \neq \emptyset$ und damit insbesondere $(b', b) \in \mathcal{T}_{\prec(A,B)} \setminus \mathcal{L}_{\prec(A,B)}$.

Sei nun $b^* \in U_1(\mathcal{T}_{\prec(A,B)}, (b', b))$, dann gilt $b^* = (t^*, s^*) \in \text{sons}^*(b)$ und mit $b = (t, s)$ auch $t^* \in \text{sons}^*(t)$ sowie $s^* \in \text{sons}^*(s)$. Wir werden im Folgenden zwei Fälle unterscheiden, wobei wir den ersten zu einem Widerspruch führen und damit lediglich der zweite Fall betrachtet werden muss.

Fall 1: Es gelten $\text{level}(t^*) - \text{level}(t) > \ell_{\max}$ und $\text{level}(s^*) - \text{level}(s) > \ell_{\max}$.

Wir zeigen in diesem Fall, dass $b^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ folgt. Dies würde somit $(b', b^*) \in \mathcal{L}_{\prec(A,B)}$ bedeuten, was nach (6.15) ein Widerspruch zu $b^* \in U_1(\mathcal{T}_{\prec(A,B)}, (b', b))$ ist.

Da $b' = (t', s') \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ ein zulässiges Blatt ist, folgt durch die Standardzulässigkeitsbedingung

$$\max\{\text{diam}(Q_{t'}), \text{diam}(Q_{s'})\} \leq \eta \text{dist}(Q_{t'}, Q_{s'}). \quad (6.16)$$

Aufgrund von $b^* \in U_1(\mathcal{T}_{\prec(A,B)}, (b', b))$ folgt $(b', b^*) \in \mathcal{T}_{\prec(A,B)} \setminus \mathcal{L}_{\prec(A,B)}$. Das Tupel ist damit unzulässig in $\mathcal{T}_{\prec(A,B)}$, was $b' \prec_{(A,B)} b^*$ und somit nach Definition $t' \prec_A t^*$ und $s' \prec_B s^*$ bedeutet. Mit Korollar 6.1.7 folgt dann

$$\text{dist}(Q_{t'}, Q_{t^*}) = 0 \quad \text{und} \quad \text{dist}(Q_{s'}, Q_{s^*}) = 0.$$

Unter Verwendung der Dreiecksungleichung gilt

$$\begin{aligned} \text{dist}(Q_{t'}, Q_{s'}) &\leq \underbrace{\text{dist}(Q_{t'}, Q_{t^*})}_{=0} + \text{diam}(Q_{t^*}) + \text{dist}(Q_{t^*}, Q_{s'}) \\ &\leq \text{diam}(Q_{t^*}) + \text{dist}(Q_{t^*}, Q_{s^*}) + \text{diam}(Q_{s^*}) + \underbrace{\text{dist}(Q_{s^*}, Q_{s'})}_{=0}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\text{dist}(Q_{t^*}, Q_{s^*}) \geq \text{dist}(Q_{t'}, Q_{s'}) - \text{diam}(Q_{t^*}) - \text{diam}(Q_{s^*}),$$

womit (6.16)

$$\begin{aligned} \eta \text{dist}(Q_{t^*}, Q_{s^*}) &\geq \eta \text{dist}(Q_{t'}, Q_{s'}) - \eta(\text{diam}(Q_{t^*}) + \text{diam}(Q_{s^*})) \\ &\geq \max\{\text{diam}(Q_{t'}), \text{diam}(Q_{s'})\} - 2\eta \max\{\text{diam}(Q_{t^*}), \text{diam}(Q_{s^*})\} \end{aligned} \quad (6.17)$$

liefert.

Aus $(b', b) \in \mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}} \setminus \mathcal{L}_{\prec_{(A,B)}} —$ vgl. mit dem Anfang dieses Beweises — folgt $b' \prec_{(A,B)} b$, also insbesondere $t' \prec_A t$ und $s' \prec_B s$. Mit Lemma 4.3.2 folgt aus $\text{level}(b') = \text{level}(b)$ und $(b', b) \in \mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}$ auch $(t', t) \in \mathcal{T}_{\prec_A}$ sowie $(s', s) \in \mathcal{T}_{\prec_B}$. Aufgrund von $t' \prec_A t$ und $s' \prec_B s$ folgt dann $(t', t) \in \mathcal{T}_{\prec_A}^-$ sowie $(s', s) \in \mathcal{T}_{\prec_B}^-$ und da $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ lokal geometrisch balanciert bzgl. C_{bal} und A bzw. B sind, gilt

$$\text{diam}(Q_{t'}) \geq C_{\text{bal}}^{-1} \text{diam}(Q_t) \quad \text{und} \quad \text{diam}(Q_{s'}) \geq C_{\text{bal}}^{-1} \text{diam}(Q_s). \quad (6.18)$$

Wir setzen

$$i := \left\lceil \log_{C_{\text{geo}}} ((1 + 2\eta)C_{\text{bal}}) \right\rceil \in \mathbb{N},$$

dann gilt $\ell_{\max} = i\ell_{\text{geo}}$. Es sind $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ geometrisch kontrahierend bzgl. C_{geo} und ℓ_{geo} , womit aus der Annahme

$$\text{level}(t^*) - \text{level}(t) > \ell_{\max} = i\ell_{\text{geo}} \quad \text{und} \quad \text{level}(s^*) - \text{level}(s) > \ell_{\max} = i\ell_{\text{geo}}$$

und $t^* \in \text{sons}^*(t)$ sowie $s^* \in \text{sons}^*(s)$ nach Lemma 6.1.6

$$\text{diam}(Q_t) \geq C_{\text{geo}}^i \text{diam}(Q_{t^*}) \quad \text{und} \quad \text{diam}(Q_s) \geq C_{\text{geo}}^i \text{diam}(Q_{s^*})$$

folgt. Durch $i \geq \log_{C_{\text{geo}}} ((1 + 2\eta)C_{\text{bal}})$ und $C_{\text{geo}} > 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{diam}(Q_t) &\geq (1 + 2\eta)C_{\text{bal}} \text{diam}(Q_{t^*}) \\ \text{und} \quad \text{diam}(Q_s) &\geq (1 + 2\eta)C_{\text{bal}} \text{diam}(Q_{s^*}). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Setzen wir (6.18) und (6.19) in (6.17) ein, folgt

$$\begin{aligned} \eta \text{dist}(Q_{t^*}, Q_{s^*}) &\geq \max\{\text{diam}(Q_{t'}), \text{diam}(Q_{s'})\} - 2\eta \max\{\text{diam}(Q_{t^*}), \text{diam}(Q_{s^*})\} \\ &\geq C_{\text{bal}}^{-1} \max\{\text{diam}(Q_t), \text{diam}(Q_s)\} \\ &\quad - 2\eta \max\{\text{diam}(Q_{t^*}), \text{diam}(Q_{s^*})\} \\ &\geq C_{\text{bal}}^{-1} \max\{(1 + 2\eta)C_{\text{bal}} \text{diam}(Q_{t^*}), (1 + 2\eta)C_{\text{bal}} \text{diam}(Q_{s^*})\} \\ &\quad - 2\eta \max\{\text{diam}(Q_{t^*}), \text{diam}(Q_{s^*})\} \\ &= (1 + 2\eta) \max\{\text{diam}(Q_{t^*}), \text{diam}(Q_{s^*})\} \\ &\quad - 2\eta \max\{\text{diam}(Q_{t^*}), \text{diam}(Q_{s^*})\} \\ &= \max\{\text{diam}(Q_{t^*}), \text{diam}(Q_{s^*})\}. \end{aligned}$$

Der Block $b^* = (t^*, s^*)$ ist somit im Sinne der Standardzulässigkeitsbedingung zulässig, was $b^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ bedeutet. Es kann also nicht $b^* \in U_1(\mathcal{T}_{\prec_{(A,B)}}, (b', b))$ gelten (vgl. (6.15)).

Die Annahme war somit falsch und es folgt

$$\text{level}(t^*) - \text{level}(t) \leq \ell_{\max} \quad \text{oder} \quad \text{level}(s^*) - \text{level}(s) \leq \ell_{\max}. \quad (6.20)$$

Fall 2: Es gilt $\text{level}(t^*) - \text{level}(t) \leq \ell_{\max}$ oder $\text{level}(s^*) - \text{level}(s) \leq \ell_{\max}$.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass beide Aussagen in (6.20) gelten. Mit $b \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\succ(A,B)}, b')$ gilt $\text{level}(b') = \text{level}(b)$, also nach Lemma 3.2.6 über die Darstellung des Blocklevels

$$\begin{aligned} \text{level}(b^*) &= \max\{\text{level}(t^*), \text{level}(s^*)\} \\ &\leq \max\{\ell_{\max} + \text{level}(t), \ell_{\max} + \text{level}(s)\} \\ &= \ell_{\max} + \max\{\text{level}(t), \text{level}(s)\} \\ &= \ell_{\max} + \text{level}(b) = \ell_{\max} + \text{level}(b'), \end{aligned}$$

und somit

$$\text{level}(b^*) - \text{level}(b') \leq \ell_{\max}. \quad (6.21)$$

Es gelte nun $\text{level}(t^*) - \text{level}(t) \leq \ell_{\max}$ und $\text{level}(s^*) - \text{level}(s) > \ell_{\max}$, dann folgt

$$\text{level}(t^*) \leq \ell_{\max} + \text{level}(t) < \text{level}(s^*) + \text{level}(t) - \text{level}(s). \quad (6.22)$$

Angenommen es gilt $0 < \text{level}(t) - \text{level}(s)$, dann folgt $\text{level}(s) < \text{level}(t)$ und somit nach Lemma 3.2.6 $s \in \mathcal{L}_{\mathcal{J}}$. Mit $s^* \in \text{sons}^*(s)$ gilt dann $s^* = s$ und damit

$$\text{level}(t^*) - \text{level}(t) \leq \ell_{\max} < \text{level}(s^*) - \text{level}(s) = 0,$$

was im Widerspruch zu $t^* \in \text{sons}^*(t)$ steht. Es gilt also $\text{level}(t) - \text{level}(s) \leq 0$ und damit nach (6.22)

$$\text{level}(t^*) < \text{level}(s^*). \quad (6.23)$$

Hier folgt dann mit Lemma 3.2.6 $t^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$.

Da $b^* \in U_1(\mathcal{T}_{\succ(A,B)}, (b', b))$ gilt, folgt $(b', b^*) \in \mathcal{T}_{\succ(A,B)} \setminus \mathcal{L}_{\succ(A,B)}$, was insbesondere $b^* = (t^*, s^*) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ bedeutet. Aus (6.23) folgt die Existenz eines $s^{*+} \in \text{pred}(s^*)$ mit $\text{level}(t^*) = \text{level}(s^{*+})$ (vgl. Korollar 2.4.27) und nach Lemma 3.2.20 (a) gilt $(t^*, s^{*+}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$, also $s^{*+} \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t^*)$.

Es folgt dann

$$s^* \in \{\tilde{s}^* \in \text{sons}^*(s^{*+}) \mid (t^*, \tilde{s}^*) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}\} = U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t^*, s^{*+}))$$

und durch $t^* \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ sowie $s^{*+} \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, t^*)$ auch

$$\begin{aligned} \text{level}(s^*) - \text{level}(t^*) &\leq \max_{\tilde{s}^* \in U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t^*, s^{*+}))} \text{level}(\tilde{s}^*) - \text{level}(t^*) = L_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t^*, s^{*+})) \\ &\leq \max_{\substack{\tilde{t} \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}} \\ \tilde{s} \in \text{row}^=(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, \tilde{t})}} L_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (\tilde{t}, \tilde{s})) = C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}. \end{aligned}$$

6 Numerische Beispiele

Mit $\text{level}(b') = \text{level}(b)$ liefern Lemma 3.2.6 und $C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \geq 0$ — vgl. Bemerkung 3.4.19 unter Verwendung von $U_1(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}, (t^*, s^{*+})) \neq \emptyset$ — die Abschätzung

$$\begin{aligned} \text{level}(b^*) &= \max\{\text{level}(t^*), \text{level}(s^*)\} \leq \max\{\text{level}(t^*), C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} + \text{level}(t^*)\} \\ &= C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} + \text{level}(t^*) \leq C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} + \ell_{\max} + \text{level}(t) \\ &\leq C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} + \ell_{\max} + \max\{\text{level}(t), \text{level}(s)\} \\ &= C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} + \ell_{\max} + \text{level}(b) = C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} + \ell_{\max} + \text{level}(b') \end{aligned}$$

und damit

$$\text{level}(b^*) - \text{level}(b') \leq \ell_{\max} + C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}. \quad (6.24)$$

Durch eine analoge Diskussion ergibt sich im Fall von $\text{level}(t^*) - \text{level}(t) > \ell_{\max}$ und $\text{level}(s^*) - \text{level}(s) \leq \ell_{\max}$ die Abschätzung

$$\text{level}(b^*) - \text{level}(b') \leq \ell_{\max} + C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}. \quad (6.25)$$

Insgesamt liefern (6.21), (6.24) und (6.25) die zu beweisende Abschätzung

$$\begin{aligned} L_1(\mathcal{T}_{\prec(A, B)}, (b', b)) &= \max_{b^* \in U_1(\mathcal{T}_{\prec(A, B)}, (b', b))} \text{level}(b^*) - \text{level}(b') \\ &\leq \max\{\ell_{\max} + C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}, \ell_{\max} + C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}\}. \end{aligned}$$

(b) Seien $b \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ und $b' \in \text{col}^=(\mathcal{T}_{\prec(A, B)}, b)$, dann gilt (vgl. Korollar 4.2.30 und Bemerkung 4.2.31)

$$b' \in \text{col}^=(\mathcal{T}_{\prec(A, B)}, b) = \text{row}^=(\mathcal{T}_{\prec(A, B)}^T, b) = \text{row}^=(\mathcal{T}_{\prec(A^*, B^*)}, b).$$

Mit Korollar 6.1.2 folgt, dass A^* eine geometrische Matrix bzgl. $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ und B^* eine geometrische Matrix bzgl. $(\psi_j)_{j \in \mathcal{J}}$ ist und nach Korollar 6.1.9 sind $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ sowie $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ lokal geometrisch balanciert bzgl. C_{bal} und A^* bzw. B^* .

Aus Teil (a) dieses Lemmas folgt dann

$$L_1(\mathcal{T}_{\prec(A^*, B^*)}, (b, b')) \leq \max\{\ell_{\max} + C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}, \ell_{\max} + C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}\}$$

und mit Korollar 3.4.20

$$L_1(\mathcal{T}_{\prec(A^*, B^*)}, (b, b')) = L_1(\mathcal{T}_{\prec(A, B)}^T, (b, b')) = L_2(\mathcal{T}_{\prec(A, B)}, (b', b)),$$

also die Aussage. □

Die Aussage dieses Lemmas lässt sich nun auf den hier zu betrachtenden Blockrelationsbaum $\mathcal{T}_{\prec(A, I)}$ anwenden, da $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein geometrischer Clusterbaum, $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ der bzgl. der

Standardzulässigkeitsbedingung zulässige Blockbaum mit $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ als Zeilen- und Spaltenclusterbaum, A und I geometrische Matrizen sowie $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ geometrisch kontrahierend und lokal geometrisch balanciert sind.

Das Besetzmuster des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems wird durch die Menge $\mathcal{L}_{\mathcal{I}(A,I)}^-$ beschrieben und diese in der durch Abschnitt 4.3.2 diskutierten Form aufgestellt. Tabelle 6.2 (a) zeigt die Zeit in Sekunden, die zum Aufstellen von $\mathcal{L}_{\mathcal{I}(A,I)}^-$ durch Algorithmus 4.3.18 benötigt wurde und Tabelle 6.2 (b) stellt den Wert

$$C_{\text{row}_{\mathcal{L}}} := \max_{b' \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}} \# \text{row}_{\mathcal{L}}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}(A,I)}, b')$$

dar, also die maximale Anzahl von Nicht-Null-Koeffizienten des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems für ein festes Blatt des Blockbaums. Des Weiteren illustriert Abbildung 6.4 das Besetzmuster exemplarisch für zwei unterschiedliche Blöcke aus $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$.

$\#\mathcal{I}$	Zeit (s)	Zeit (s)/ $\#\mathcal{I}$	$\#\mathcal{I}$	$C_{\text{row}_{\mathcal{L}}}$
225	0.00	0.000000e + 00	225	11
961	0.00	0.000000e + 00	961	24
3969	0.01	2.519526e - 06	3969	24
16129	0.07	4.340009e - 06	16129	24
65025	0.31	4.767397e - 06	65025	24
261121	1.28	4.901942e - 06	261121	24
1046529	5.18	4.949696e - 06	1046529	24

(a) Zeit
(b) $C_{\text{row}_{\mathcal{L}}}$

Tabelle 6.2: In Abhängigkeit der Verfeinerungsstufen (a) benötigte Zeit — in Sekunden — für das Aufstellen von $\mathcal{L}_{\mathcal{I}(A,I)}^-$ und (b) maximale Anzahl an Nicht-Null-Koeffizienten des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems für einen beliebigen Block aus $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$.

Clusterbasis

Zur Konstruktion der Clusterbasis werden hier *Lagrange*-Interpolationspolynome (vgl. z.B. [50, Abschnitt 2.1.1]) verwendet, wobei dafür die Diskussion aus [6, Abschnitt 4.4] als Orientierung dient. Seien $K_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ eine Rangverteilung und $(\xi_{t,j})_{j \in K_t}$ für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ — bzw. für alle $Q_t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ — die *Tschebyscheff*-Interpolationspunkte (vgl. [6, Example 4.12]) in Q_t sowie $(\mathcal{L}_{t,j})_{j \in K_t}$ die zugehörige Familie von Lagrange-Polynomen. Wir verwenden die charakteristischen Punkte $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ und definieren für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ die Matrizen $V_t \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times K_t}$ über

$$(V_t)_{ij} := \begin{cases} \mathcal{L}_{t,j}(x_i) & , \text{ falls } i \in \hat{t}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.26)$$

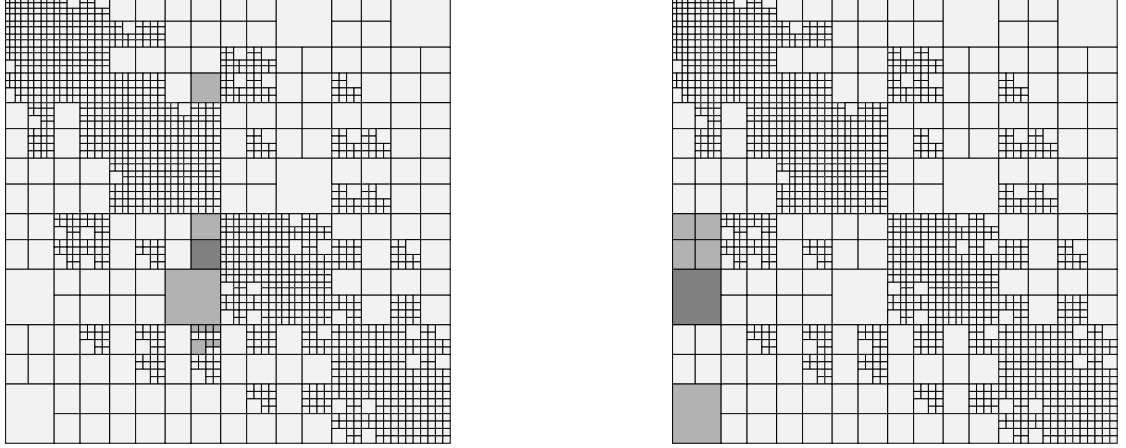


Abbildung 6.4: Exemplarisch dargestelltes Besetztheitsmuster für zwei unterschiedliche Blöcke, wobei die Markierungen unzulässiger Blätter weggelassen wurden (vgl. mit Abbildung 6.2).

für alle $(i, j) \in \mathcal{I} \times K_t$. Für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ sowie alle $t^* \in \text{sons}(t)$ setzen wir die Einträge der Transfermatrizen $E_{t^*} \in \mathbb{R}^{K_{t^*} \times K_t}$ als

$$(E_{t^*})_{ij} := \mathcal{L}_{t,j}(\xi_{t^*,i})$$

für alle $(i, j) \in K_{t^*} \times K_t$. Die Schachtelungseigenschaft der Clusterbasis

$$(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}} := ((V_t)_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}, (E_t)_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}, (K_t)_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}) \quad (6.27)$$

ergibt sich unter der Annahme $\#K_t \leq \#K_{t^*}$ für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $t^* \in \text{sons}(t)$ aus der Projektionseigenschaft des *Interpolationoperators* (vgl. [6, Abschnitt 4.4]).

Da diese Clusterbasis i.A. nicht orthogonal ist, dient [6, Algorithmus 16] aus [6, Abschnitt 5.4] dazu, diese Eigenschaft sicherzustellen. Dem Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ liegt derselbe Clusterbaum als Zeilen- und Spaltenclusterbaum zugrunde. Aus diesem Grund wird auch die Clusterbasis (6.27) als Zeilen- sowie Spaltenclusterbasis verwendet.

Nach Bemerkung 4.1.7 muss

$$\#\hat{t} = \#K_t \quad \text{und} \quad \#\hat{s} = \#K_s \quad \text{für alle } (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^-$$

gewährleisten sein, um beim Matrix-Galerkin-Verfahren nicht zwischen zulässigen und unzulässigen Blättern unterscheiden zu müssen. Nach Konstruktion des Blockbaums gilt $t, s \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ für alle $(t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^-$. Sollte es aufgrund der Clusterung dazu kommen, dass für ein Blatt $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ des Clusterbaums $\#\hat{t} < \#K_t$ gilt, so besitzt die entsprechende Clusterbasismatrix mehr Spalten als Zeilen. Die Orthogonalisierung der Clusterbasis (mit [6, Algorithmus 16]) sorgt dann dafür, dass diese zu einer quadratischen Matrix mit $\#\hat{t}$ Zeilen und Spalten wird. Gilt hingegen

$$\#\hat{t} > \#K_t, \quad (6.28)$$

so wäre die Clusterbasismatrix $V_t \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times K_t}$ um $\#\hat{t} - \#K_t > 0$ Spalten zu erweitern. Es müssten also dort z.B. mehr Interpolationspunkte gewählt werden, um V_t wie in (6.26) aufzustellen. Aufgrund von $\#\hat{t} \leq n_{\min}$ für alle $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ (vgl. (6.11)), ließe sich der Fall aus (6.28) vermeiden, wenn n_{\min} bzw. $(K_t)_{t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}}$ so gewählt werden, dass

$$n_{\min} \leq \#K_t \quad (6.29)$$

für alle $t \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ gilt. Für alle folgenden numerischen Experimente in diesem Abschnitt wurde die Rangverteilung so gewählt, dass (6.29) gilt, womit der Fall (6.28) hier also nicht auftritt.

Zum Assemblieren des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems dienen die in Abschnitt 4.3.2 hergeleiteten Algorithmen. Tabelle 6.3 zeigt exemplarisch — für drei Interpolationspunkte in jede Koordinatenrichtung — die Zeit in Sekunden, die zum Assemblieren des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems auf dem feinsten Level der Blockhierarchie in Abhängigkeit der Anzahl an Freiheitsgraden benötigt wurde. Durch die Anzahl der verwendeten Interpolationspunkte ergibt sich ein lokaler Rang von $3^2 = 9$.

$\#\mathcal{I}$	Zeit (s)	Zeit (s)/ $\#\mathcal{I}$
225	0.00	$0.000000e + 00$
961	0.01	$1.040583e - 05$
3969	0.03	$7.558579e - 06$
16129	0.18	$1.116002e - 05$
65025	0.78	$1.199539e - 05$
261121	3.34	$1.279100e - 05$
1046529	13.70	$1.309089e - 05$

Tabelle 6.3: Benötigte Zeit — in Sekunden — für das Assemblieren des durch $\mathcal{L}_{\infty(A,I)}^-$ gegebenen Matrix-Galerkin-Gleichungssystems mit einem lokalen Rang von $3^2 = 9$ und für verschiedene Verfeinerungsstufen.

Rechte Seite

Für die rechte Seite des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems sind für alle $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ die Matrizen

$$V_t^* I V_s \in \mathbb{R}^{K_t \times K_s}$$

zu berechnen. Sei $b = (t, s) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$, dann gilt

$$\chi_t \chi_s = \left(\sum_{i \in \hat{t}} e_i e_i^* \right) \left(\sum_{j \in \hat{s}} e_j e_j^* \right) = \sum_{(i,j) \in \hat{t} \times \hat{s}} e_i (e_i^* e_j) e_j^*.$$

Wir betrachten zuerst den Fall $\hat{t} \cap \hat{s} = \emptyset$, dann ergibt sich $\chi_t \chi_s = 0 \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und damit

$$V_t^* I V_s = V_t^* \chi_t \chi_s V_s = V_t^* 0 V_s = 0 \in \mathbb{R}^{K_t \times K_s}.$$

Gilt nun $\hat{t} \cap \hat{s} \neq \emptyset$, dann folgt mit Korollar 3.1.5 $s \in \text{pred}(t)$ oder $t \in \text{pred}(s)$. Nach Konstruktion eines Blockbaums kann dies nur im Fall von $s = t$ gelten. Zusammen mit der Orthogonalität der Clusterbasis folgt

$$V_t^* I V_s = V_t^* \chi_t \chi_s V_s = V_t^* \chi_t \chi_t V_t = V_t^* V_t = I \in \mathbb{R}^{K_t \times K_t}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$V_t^* I V_s = \begin{cases} I \in \mathbb{R}^{K_t \times K_t} & , \text{ falls } t = s, \\ 0 \in \mathbb{R}^{K_t \times K_s} & \text{ sonst,} \end{cases}$$

womit die rechte Seite durch eine Schleife über die Menge $\mathcal{L}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ aufgestellt werden kann.

Ergebnisse

Es werden nun die Ergebnisse für die Berechnung eines Vorkonditionierers mit dem Matrix-Galerkin-Verfahren vorgestellt. Die Qualität dieses Vorkonditionierers wurde hierfür in Verbindung mit einem cg-Verfahren untersucht. Beim Lösen des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems wurden mit dem Nullvektor als Startvektor solange Iterationsschritte des pcg-Verfahrens durchgeführt, bis das relative Residuum — des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems — einen Wert kleiner als 10^{-2} aufwies. Diese Fehlerschranke wurde so gewählt, um nur eine grobe Approximation zu berechnen, die sich bereits als Vorkonditionierer eignet. Wie sich die Qualität des berechneten Vorkonditionierers hinsichtlich einer Anpassung dieses Abbruchkriteriums verhält, wird im Folgenden ebenfalls exemplarisch illustriert. Zum Aufstellen der Clusterbasis wurden jeweils drei Interpolationspunkte in beide Koordinatenrichtung gewählt, womit sich — wie oben bereits erwähnt — ein lokaler Rang von $3^2 = 9$ ergibt.

Tabelle 6.4 zeigt die Anzahl der Schritte und die Zeit in Sekunden zum Lösen des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems sowie die Größe $\|I - A\tilde{X}\|_2$, wobei \tilde{X} der mit dem Matrix-Galerkin-Verfahren berechneten Approximation von A^{-1} im \mathcal{H}^2 -Matrix-Format entspricht.

Wir betrachten die resultierende \mathcal{H}^2 -Matrix nun als Vorkonditionierer eines cg-Verfahrens zur Berechnung einer Lösung $x \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ von

$$Ax = b$$

mit $0 \neq b \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ und dem Startvektor $x^{(0)} := 0 \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$. Hierzu bezeichnen wir mit $x^{(i)} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$, $i \in \mathbb{N}_0$, die Iterierten dieses Verfahrens und mit $0 \neq x^* \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ die exakte Lösung. Tabelle 6.5 zeigt die Anzahl an Iterationsschritten i , die benötigt wurden, um

$$\frac{\|x^* - x^{(i)}\|_2}{\|x^*\|_2} \leq 10^{-8}$$

zu gewährleisten.

Um eine genauere Approximation der Inversen von A zu berechnen, stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung. Zum einen eine Erhöhung des Rangs bzw. der Interpolationsordnung und zum anderen die Anpassung der Genauigkeit des zum Lösen des Matrix-

$\#\mathcal{I}$	Schritte	Zeit (s)	$\ I - A\tilde{X}\ _2$
225	2	0.11	$2.127094e - 02$
961	2	0.83	$4.514921e - 02$
3969	2	4.47	$9.442273e - 02$
16129	3	31.04	$1.540930e - 01$
65025	4	175.60	$2.572189e - 01$
261121	4	740.98	$4.607322e - 01$
1046529	5	4543.46	$7.720643e - 01$

Tabelle 6.4: Benötigte Zeit — in Sekunden — und Schritte des pcg-Verfahrens zum Lösen des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems bis auf eine relative Genauigkeit von 10^{-2} sowie die resultierenden Fehlerterme $\|I - A\tilde{X}\|_2$ für einen lokalen Rang von $3^2 = 9$.

$\#\mathcal{I}$	i	$\ x^* - x^{(i)}\ _2 / \ x^*\ _2$	$\ I - A\tilde{X}\ _2$
225	5	$4.010897e - 09$	$2.127094e - 02$
961	6	$4.354932e - 10$	$4.514921e - 02$
3969	7	$3.425638e - 10$	$9.442273e - 02$
16129	7	$1.812799e - 10$	$1.540930e - 01$
65025	7	$3.830717e - 10$	$2.572189e - 01$
261121	7	$6.619077e - 09$	$4.607322e - 01$
1046529	8	$7.299460e - 10$	$7.720643e - 01$

Tabelle 6.5: Benötigte Anzahl an Iterationsschritten i des vorkonditionierten cg-Verfahrens, um $\|x^* - x^{(i)}\|_2 / \|x^*\|_2 \leq 10^{-8}$ unter Verwendung des mit lokalem Rang $3^2 = 9$ konstruierten Vorkonditionierers \tilde{X} sicherzustellen.

Galerkin-Gleichungssystemen verwendeten pcg-Verfahrens. Bei letztgenannter Variante ist allerdings zu beachten, dass dies nur bedingt zu einer Verbesserung der Qualität des Vorkonditionierers führt. Ausschlaggebend ist hier in höheren Dimensionen vor allem der verwendete Rang. Diese Tatsache ist in den Abbildungen 6.5 und 6.6 exemplarisch für drei bzw. vier Interpolationspunkte in jede Koordinatenrichtung dargestellt. Als Maß für die Güte des Vorkonditionierers dient dort wieder die Größe $\|I - A\tilde{X}\|_2$. In beiden Grafiken entsprechen die zu den einzelnen Kurven gehörenden Genauigkeiten wieder dem relativen Residuum des pcg-Verfahrens zum Lösen des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems. Es ist zu erkennen, dass in höheren Dimensionen eine Anpassung dieser Genauigkeit nur bedingt zu einer Verbesserung des Fehlerterms $\|I - A\tilde{X}\|_2$ führt.

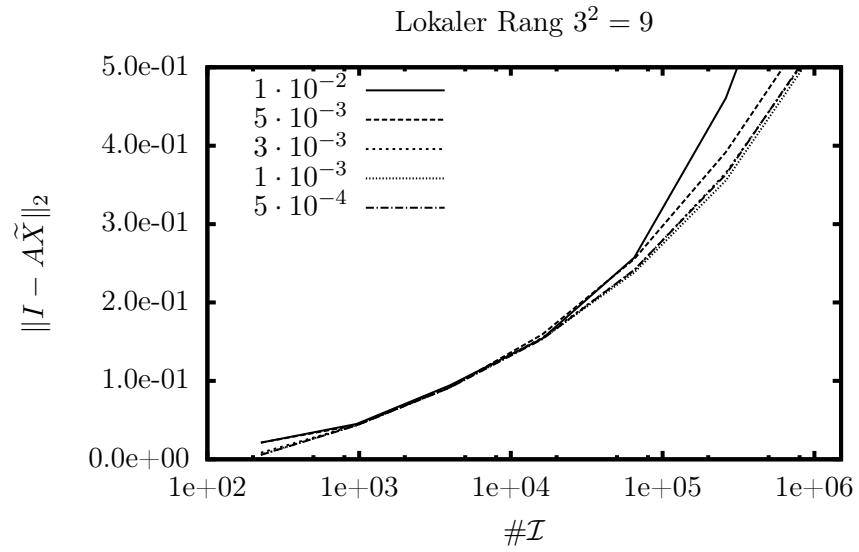


Abbildung 6.5: Verlauf des Fehlerterms $\|I - A\tilde{X}\|_2$ für verschiedene Genauigkeiten des Lösungsverfahrens in Abhängigkeit der Anzahl an Freiheitsgraden mit dem lokalen Rang $3^2 = 9$.

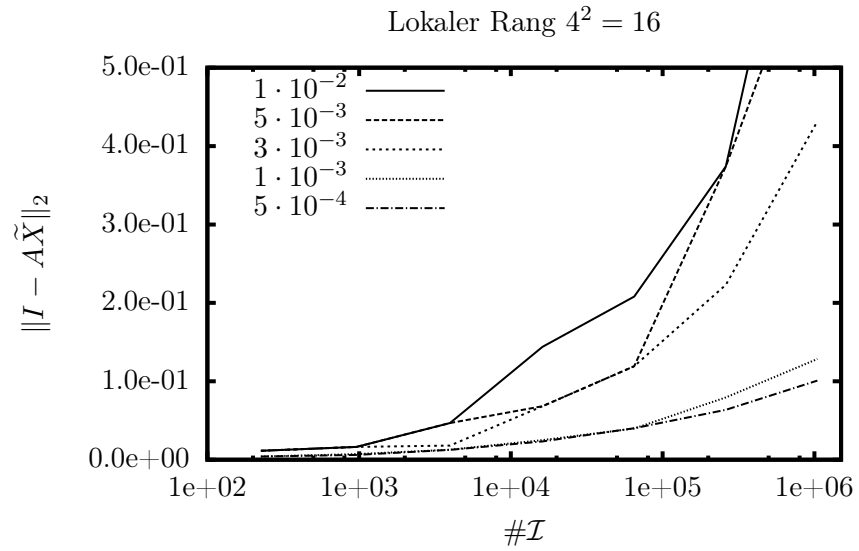


Abbildung 6.6: Verlauf des Fehlerterms $\|I - A\tilde{X}\|_2$ für verschiedene Genauigkeiten des Lösungsverfahrens in Abhängigkeit der Anzahl an Freiheitsgraden mit dem lokalen Rang $4^2 = 16$.

6.2.2 Partielle Differentialgleichung

Diesem Abschnitt liegt das *L-Gebiet*

$$\Omega_L := [0, 1] \times [0, 0.5] \cup [0, 0.5] \times [0.5, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$$

zugrunde, und es ist eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (6.7) für die rechte Seite

$$f : \Omega_L \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 \quad (6.30)$$

gesucht. Zur Berechnung einer Näherungslösung wird der Ansatz der zweiten Variante aus Abschnitt 1.1 verwendet. Hierfür muss das zugrundeliegende Gebiet eine Tensorstruktur aufweisen, was für das L-Gebiet Ω_L nicht gegeben ist. Allerdings gilt

$$\Omega_L \subseteq \Omega := [0, 1]^2 = [0, 1] \times [0, 1],$$

womit Ω_L in ein Tensorgebiet eingebettet werden kann (vgl. Abbildung 6.7).

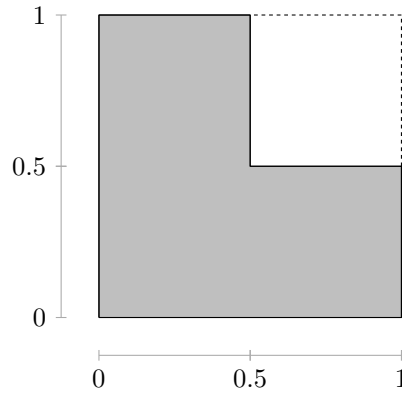


Abbildung 6.7: L-Gebiet Ω_L , eingebettet in das Einheitsquadrat $\Omega = [0, 1]^2$.

Es wird nun — wie in der Einleitung dieser Arbeit — die resultierende Matrixgleichung für die hier definierte Problemstellung bzgl. des Gebiets $\Omega = [0, 1]^2$ hergeleitet und dann gezeigt, wie daraus die gesuchte Lösung für das L-Gebiet Ω_L berechnet werden kann. Hierfür wird ein Blockbaum konstruiert, in dem ein Blatt existiert, welches genau das künstlich hinzugefügte Gebiet $[0.5, 1] \times [0.5, 1]$ beschreibt, und dieses Blatt dann im Matrix-Galerkin-Gleichungssystem nicht als Freiheitsgrad behandelt.

Ebenso wie im vorherigen Abschnitt wird nun zuerst der hier verwendete Ansatzraum V_h definiert und anschließend der dieser Anwendung zugrundeliegende Cluster- sowie Blockbaum angegeben. Es folgt dann eine Betrachtung der benötigten Relationsbäume, bevor die konkrete Clusterbasis konstruiert und das Aufstellen der rechten Seite diskutiert wird.

Wir verwenden vorerst anstelle von Ω_L das Gebiet Ω und definieren hierfür die Funktion

$$\tilde{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1.$$

6 Numerische Beispiele

Die Galerkin-Variationsformulierung auf Ω lautet dann mit einem geeigneten endlich-dimensionalen Ansatzraum V_h wieder

$$a(u_h, v_h) = \langle \tilde{f}, v_h \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v_h \in V_h \quad (6.31)$$

mit

$$a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} \langle \nabla u_h(x), \nabla v_h(x) \rangle_2 dx$$

für alle $u_h, v_h \in V_h$.

Matrixgleichung

Zur Konstruktion des Ansatzraums V_h betrachten wir das Intervall $[0, 1]$ und definieren für $N \in \mathbb{N}$ die Indexmenge $\mathcal{I} := \{1, \dots, N\}$, die *Gitterweite*

$$h := \frac{1}{N+1}$$

sowie die Familie $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ von Punkten durch

$$x_i := ih$$

für alle $i \in \mathcal{I}$ (vgl. Abbildung 6.8).

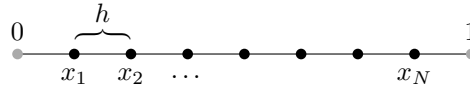


Abbildung 6.8: Innere Gitterpunkte $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ des Intervalls $[0, 1]$ mit Gitterweite h .

Hieraus ergibt sich ein Tensorgitter für Ω und wählen wir $N \in \mathbb{N}$ *ungerade*, auch ein Gitter für Ω_L (siehe Abbildung 6.9).

Analog zu Abschnitt 6.2.1 sei $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ die Familie von Funktionen, für die

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i = j, \\ 0 & \text{ sonst} \end{cases}$$

für alle $i, j \in \mathcal{I}$ gilt und φ_i für alle $i \in \mathcal{I}$ linear auf den Intervallen $[0, x_1]$, $[x_N, 1]$ und $[x_j, x_{j+1}]$ für alle $j \in \{1, \dots, N-1\}$ ist. Auch hier bildet $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie linear unabhängiger Funktionen. Wir setzen

$$V_{h,1} := \left\{ \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i \varphi_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } i \in \mathcal{I} \right\}$$

sowie den Ansatzraum

$$V_h := V_{h,1} \otimes V_{h,1}. \quad (6.32)$$

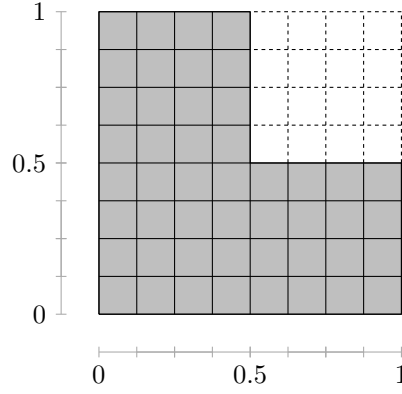


Abbildung 6.9: Durch die Unterteilung des Intervalls $[0, 1]$ generiertes Tensorgitter für das L-Gebiet Ω_L und das Einheitsquadrat $\Omega = [0, 1]^2$.

Des Weiteren definieren wir für alle $u_h, v_h \in V_h$

$$a^{(1)}(u_h, v_h) := \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_1} u_h(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} v_h(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \quad (6.33)$$

und

$$a^{(2)}(u_h, v_h) := \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_2} u_h(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} v_h(x_1, x_2) dx_2 dx_1, \quad (6.34)$$

dann gilt

$$a(u_h, v_h) = a^{(1)}(u_h, v_h) + a^{(2)}(u_h, v_h)$$

für alle $u_h, v_h \in V_h$.

Stellen wir $u_h \in V_h$ durch

$$u_h = \sum_{k,l \in \mathcal{I}} u_{h,kl} (\varphi_k \otimes \varphi_l)$$

dar und verwenden als Testfunktion $v_h = \varphi_i \otimes \varphi_j$ für $i, j \in \mathcal{I}$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} a^{(1)}(u_h, v_h) &= \sum_{k,l \in \mathcal{I}} u_{h,kl} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_1} (\varphi_k \otimes \varphi_l)(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} (\varphi_i \otimes \varphi_j)(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \sum_{k,l \in \mathcal{I}} u_{h,kl} \int_0^1 \int_0^1 \varphi'_k(x_1) \varphi_l(x_2) \varphi'_i(x_1) \varphi_j(x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \sum_{k,l \in \mathcal{I}} u_{h,kl} \int_0^1 \varphi'_k(x_1) \varphi'_i(x_1) dx_1 \int_0^1 \varphi_l(x_2) \varphi_j(x_2) dx_2 \end{aligned}$$

sowie mit einer analogen Betrachtung

$$a^{(2)}(u_h, v_h) = \sum_{k,l \in \mathcal{I}} u_{h,kl} \int_0^1 \varphi_k(x_1) \varphi_i(x_1) dx_1 \int_0^1 \varphi'_l(x_2) \varphi'_j(x_2) dx_2.$$

6 Numerische Beispiele

Definieren wir die Matrizen $A, M, U \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ durch

$$a_{ik} := \int_0^1 \varphi'_k(z) \varphi'_i(z) \, dz, \quad m_{jl} := \int_0^1 \varphi_l(z) \varphi_j(z) \, dz \quad \text{und} \quad u_{kl} := u_{h,kl}$$

für alle $i, j, k \in \mathcal{I}$, dann gilt

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) &= a^{(1)}(u_h, v_h) + a^{(2)}(u_h, v_h) = \sum_{k,l \in \mathcal{I}} u_{kl} a_{ik} m_{jl} + \sum_{k,l \in \mathcal{I}} u_{kl} m_{ik} a_{jl} \\ &= \sum_{k,l \in \mathcal{I}} a_{ik} u_{kl} m_{lj}^* + \sum_{k,l \in \mathcal{I}} m_{ik} u_{kl} a_{lj}^* \\ &= (AUM^*)_{ij} + (MUA^*)_{ij}. \end{aligned}$$

Für die rechte Seite folgt durch Einsetzen der Testfunktion $v_h = \varphi_i \otimes \varphi_j$ die Darstellung

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}, v_h \rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_0^1 \int_0^1 \tilde{f}(x_1, x_2) (\varphi_i \otimes \varphi_j)(x_1, x_2) \, dx_2 \, dx_1 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \tilde{f}(x_1, x_2) \varphi_i(x_1) \varphi_j(x_2) \, dx_2 \, dx_1 \\ &= \int_0^1 \varphi_i(x_1) \int_0^1 \tilde{f}(x_1, x_2) \varphi_j(x_2) \, dx_2 \, dx_1 \\ &= \int_0^1 \varphi_i(x_1) \, dx_1 \int_0^1 \varphi_j(x_2) \, dx_2. \end{aligned}$$

Mit der durch

$$c_{ij} := \int_0^1 \varphi_i(x_1) \, dx_1 \int_0^1 \varphi_j(x_2) \, dx_2$$

für alle $i, j \in \mathcal{I}$ definierten Matrix $C \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ ergibt sich die Matrixgleichung

$$AUM^* + MUA^* = C \tag{6.35}$$

zur Bestimmung einer Lösung von (6.31).

Aufgrund der Definition des Ansatzraums folgt direkt, dass die Matrizen A und M $C_{\text{sp},A,M}$ -schwachbesetzt mit $C_{\text{sp},A,M} \leq 3$ sind, da sich nur Träger von Basisfunktionen überschneiden, die ein gemeinsames Teilintervall besitzen. Des Weiteren entspricht A dem mit linearen Basisfunktionen diskretisierten Laplace-Operator im Eindimensionalen und M der eindimensionalen *Massematrix*. Die Symmetrie von A und M lässt sich direkt nachrechnen, womit die positive Definitheit von A aus [15, 1.5 Poincaré-Friedrichssche Ungleichung] und die von M aus der Definitheit der L^2 -Norm folgt. Auch dieses Anwendungsbeispiel fügt sich somit in den Rahmen der Diskussion aus Abschnitt 4.1 ein.

Die Tatsache, dass M eine geometrische Matrix bzgl. $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ ist, ergibt sich direkt aus der Definition der Einträge

$$m_{ij} = \int_0^1 \varphi_j(z) \varphi_i(z) \, dz$$

für alle $i, j \in \mathcal{I}$. Gilt $m_{ij} \neq 0$ für $i, j \in \mathcal{I}$, dann muss insbesondere $\text{supp}(\varphi_j) \cap \text{supp}(\varphi_i) \neq \emptyset$ gelten. Für die Matrix A folgt mit $i, j \in \mathcal{I}$ aus

$$\text{supp}(\varphi'_i) \subseteq \text{supp}(\varphi_i) \quad \text{und} \quad \text{supp}(\varphi'_j) \subseteq \text{supp}(\varphi_j)$$

sowie

$$a_{ij} = \int_0^1 \varphi'_j(z) \varphi'_i(z) dz \neq 0$$

ebenfalls $\text{supp}(\varphi_j) \cap \text{supp}(\varphi_i) \neq \emptyset$, womit auch diese eine geometrische Matrix bzgl. $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ dargestellt.

Cluster- und Blockbaum

Als zugrundeliegender Clusterbaum wird ein geometrischer Clusterbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ bzgl. $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ verwendet und zur Konstruktion der geometrischen Cluster hierfür analog zum vorherigen Anwendungsbeispiel aus Abschnitt 6.2.1 vorgegangen.

Wir untersuchen auch den Clusterbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ hinsichtlich der in Abschnitt 6.1 definierten geometrischen Eigenschaften. Hierzu sei für die folgenden Betrachtungen $n_{\min} := 20$ fest gewählt — siehe (6.11) für die Definition von n_{\min} .

Aufgrund der Tatsache, dass auch in diesem Beispiel die charakteristischen Punkte regelmäßig in $[0, 1]$ angeordnet sind, werden sich die geometrischen Cluster nach jeder Unterteilung ungefähr halbiert haben. In den numerische Berechnungen ergab sich für

$$\tilde{C}_{\text{geo}} := \min_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} \left\{ \frac{\text{diam}(Q_t)}{\text{diam}(Q_{t^*})} \mid t^* \in \text{sons}^*(t) \text{ mit } \text{level}(t^*) - \text{level}(t) = 1 \right\}$$

unabhängig von der Anzahl der Freiheitsgrade in $[0, 1]$ — es wurden hier mit einer globalen Verfeinerungsstrategie 63 bis 16383 Freiheitsgrade gerechnet — immer ein Wert von $\tilde{C}_{\text{geo}} \geq 1.8$. Der Clusterbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ wird somit im Folgenden für die hier verwendeten Verfeinerungsstufen als geometrisch kontrahierend bzgl.

$$C_{\text{geo}} := 1.8 \quad \text{und} \quad \ell_{\text{geo}} := 1$$

angenommen.

Es seien \asymp_A und \asymp_M die Matrix-Galerkin-Clusterrelationen bzgl. A bzw. M in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ sowie \mathcal{T}_{\asymp_A} und \mathcal{T}_{\asymp_M} die zugehörigen Relationsbäume. Die durchgeführten numerischen Berechnungen haben hier ergeben, dass für die Werte

$$\tilde{C}_{\text{bal},A} := \max_{(t',t) \in \mathcal{T}_{\asymp_A}^-} \frac{\text{diam}(Q_{t'})}{\text{diam}(Q_t)} \quad \text{und} \quad \tilde{C}_{\text{bal},M} := \max_{(t',t) \in \mathcal{T}_{\asymp_M}^-} \frac{\text{diam}(Q_{t'})}{\text{diam}(Q_t)}$$

unabhängig von der Anzahl der Freiheitsgrade in $[0, 1]$ — wieder für 63 bis 16383 Freiheitsgrade gerechnet — die Abschätzung $\tilde{C}_{\text{bal},A} = \tilde{C}_{\text{bal},M} \leq 1.07$ gilt.

Die Tatsache, dass $\tilde{C}_{\text{bal},A}$ und $\tilde{C}_{\text{bal},M}$ übereinstimmen, liegt darin begründet, dass A und M beides tridiagonale Matrizen darstellen und für die beiden Relationen \asymp_A und \asymp_M lediglich die Positionen, nicht aber die konkreten Werte aller Nicht-Null-Einträge

6 Numerische Beispiele

von Interesse sind. Der Clusterbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ wird somit für die hier verwendeten Verfeinerungsstufen als lokal geometrisch balanciert bzgl.

$$C_{\text{bal}} := 1.07$$

und A sowie M angenommen.

Für die gegebene Aufgabenstellung, also der Berechnung einer Lösung auf dem L -Gebiet mit rechter Seite $f \equiv 1$, besitzt die Lösung — genauer gesagt der Gradient der Lösung — eine *Singularität* an der Ecke des Punktes

$$\bar{x} := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (6.36)$$

(siehe z.B. [14, 16]). Aus diesem Grund wird ein Blockbaum verwendet, dessen Blätter hin zu dieser Singularität kleiner werden. Es wird also angenommen, dass die Lösung auf größeren Blättern hinreichend *glatt* ist und somit durch die — noch zu definierende — Clusterbasis besser approximiert werden kann.

Den im Folgenden verwendeten Blockbaum konstruieren wir nun basierend auf $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ als Zeilen- und Spaltenclusterbaum. Wie in Abschnitt 6.2.1 wird ein Zulässigkeitsparameter $\bar{\eta} \in \mathbb{R}_{>0}$ gewählt, hier allerdings die *Singularitätszulässigkeitsbedingung*

$$\begin{aligned} (t, s) \text{ zulässig} \\ \Leftrightarrow \\ \max\{\text{diam}(Q_t), \text{diam}(Q_s)\} \leq \bar{\eta} \max\left\{\text{dist}(Q_t, \{\bar{x}\}), \text{dist}(Q_s, \{\bar{x}\})\right\} \end{aligned} \quad (6.37)$$

für alle $(t, s) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und mit \bar{x} aus (6.36) definiert — auch diese Zulässigkeitsbedingung lässt sich auf die Verwendung unterschiedlicher Clusterbäume $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ erweitern. Je größer also zwei geometrische Cluster $Q_t, Q_s \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ sind, desto weiter müssen diese von der Singularität entfernt sein, um einen zulässigen Block darzustellen. Mit dem Parameter $\bar{\eta}$ lässt sich der Einfluss der Singularität auf die Konstruktion des Blockbaums steuern. Es sei im Folgenden $\bar{\eta} := 2.0$ und $\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ der bzgl. der Singularitätszulässigkeitsbedingung (minimal) zulässige Blockbaum für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ als Zeilen- und Spaltenclusterbaum. Die Blätter dieses Baums sind für 511 Freiheitsgrade in $[0, 1]$ in Abbildung 6.10 exemplarisch dargestellt — unzulässige Blätter sind wieder dunkel markiert.

Folgendes Lemma zeigt, dass dieser Blockbaum als Teilbaum eines Blockbaums bzgl. der Standardzulässigkeitsbedingung (6.14) aufgefasst werden kann.

Lemma 6.2.4 (Teilbaum). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein geometrischer Clusterbaum bzgl. einer Familie $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ von Funktionen sowie $\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ der bzgl. der Singularitätszulässigkeitsbedingung (6.37) mit Zulässigkeitsparameter $\bar{\eta} \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ der bzgl. der Standardzulässigkeitsbedingung (6.14) mit Zulässigkeitsparameter $\eta \in \mathbb{R}_{>0}$ zulässige Blockbaum für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ als Zeilen- und Spaltenclusterbaum. Gilt $\eta \leq \bar{\eta}/2$, dann ist $\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ ein Teilbaum von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$.*

Beweis. Es gelte $\eta \leq \bar{\eta}/2$. Wir gehen vor wie im Beweis von Lemma 6.2.1. Es gilt

$$\text{root}(\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}) = (\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}), \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}})) = \text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}),$$

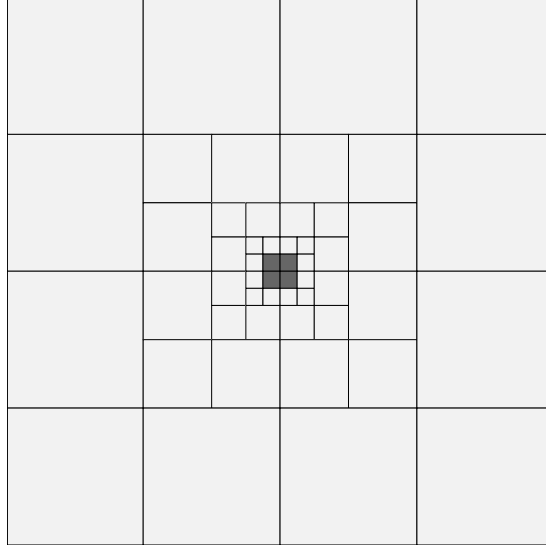


Abbildung 6.10: Bzgl. der Singularitätszulässigkeitsbedingung mit Parameter $\bar{\eta} = 2.0$ zulässiger Blockbaum $\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ für $\#\mathcal{I} = 511$.

womit die Wurzeln der beiden Blockbäume übereinstimmen. Wir zeigen nun die Inklusion $\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$.

Sei $(t', t) \in \bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ mit $(t', t) \neq \text{root}(\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}})$, dann existiert ein Pfad

$$((t'_0, t_0), \dots, (t'_n, t_n))$$

mit $n \in \mathbb{N}$ von $\text{root}(\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}})$ nach (t', t) in $\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ — es gilt $n \geq 1$ aufgrund von $(t', t) \neq \text{root}(\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}})$. Sei $i \in \{0, \dots, n-1\}$, dann ist (t'_i, t_i) unzulässig in $\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$, was

$$\max\{\text{diam}(Q_{t'_i}), \text{diam}(Q_{t_i})\} > \bar{\eta} \max\left\{\text{dist}(Q_{t'_i}, \{\bar{x}\}), \text{dist}(Q_{t_i}, \{\bar{x}\})\right\}$$

bedeutet. Unter Verwendung der Dreiecksungleichung, $\text{diam}(\{\bar{x}\}) = 0$ und $\eta \leq \bar{\eta}/2$ folgt

$$\begin{aligned} \max\{\text{diam}(Q_{t'_i}), \text{diam}(Q_{t_i})\} &> \bar{\eta} \max\left\{\text{dist}(Q_{t'_i}, \{\bar{x}\}), \text{dist}(Q_{t_i}, \{\bar{x}\})\right\} \\ &\geq \bar{\eta} \frac{1}{2} (\text{dist}(Q_{t'_i}, \{\bar{x}\}) + \text{dist}(Q_{t_i}, \{\bar{x}\})) \\ &= \frac{\bar{\eta}}{2} (\text{dist}(Q_{t'_i}, \{\bar{x}\}) + \text{diam}(\{\bar{x}\}) + \text{dist}(\{\bar{x}\}, Q_{t_i})) \\ &\geq \eta \text{dist}(Q_{t'_i}, Q_{t_i}) \end{aligned}$$

und damit die Unzulässigkeit von (t'_i, t_i) im Sinne der Standardzulässigkeitsbedingung.

Dies gilt für alle $i \in \{0, \dots, n-1\}$ und da die Wurzeln von $\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ sowie die Konstruktion der Söhne übereinstimmen, ist

$$((t'_0, t_0), \dots, (t'_n, t_n))$$

6 Numerische Beispiele

ein Pfad von $\text{root}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}})$ nach (t', t) in $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$. Es folgt $(t', t) \in \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$, womit $\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ einen Teilbaum von $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ darstellt. \square

Aufgrund von $\bar{\eta} = 2.0$ sei $\eta := \bar{\eta}/2 = 1.0$ gewählt und $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ der bzgl. der Standardzulässigkeitsbedingung zulässige Blockbaum für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ als Zeilen- und Spaltenclusterbaum, welcher für 511 Freiheitsgrade in $[0, 1]$ in Abbildung 6.11 exemplarisch dargestellt ist.

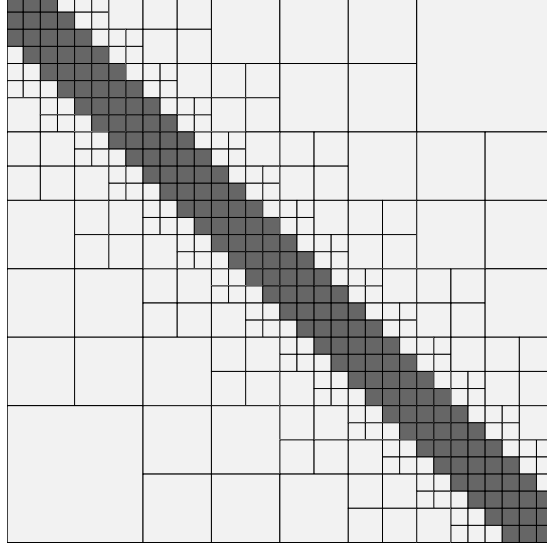


Abbildung 6.11: Bzgl. der Standardzulässigkeitsbedingung zulässiger Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ mit Zulässigkeitsparameter $\eta = 1.0$ und $\#\mathcal{I} = 511$.

Tabelle 6.6 zeigt, wie sich die Werte

$$\tilde{C}_{\text{sp}, \bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}} := \max_{t, s \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} \{ \# \text{row}(\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}, t), \# \text{col}(\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}, s) \}$$

und

$$\tilde{C}_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}} := \max_{t, s \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}} \{ \# \text{row}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}, t), \# \text{col}(\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}, s) \}$$

in Abhängigkeit der Anzahl an Freiheitsgraden in $[0, 1]$ verhalten. Es ist zu erkennen, dass

$$C_{\text{sp}, \bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}} := 4 \tag{6.38}$$

bzgl. der hier verwendeten Verfeinerungsstufen eine Schwachbesetztheitskonstante für den Blockbaum $\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ definiert.

Wie zu Beginn dieses Abschnitts motiviert, wird der Blockbaum $\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ nun so modifiziert, dass von dem der Matrixgleichung zugrundeliegenden Gebiet $\Omega = [0, 1]^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ zu dem L-Gebiet gewechselt werden kann. Aufgrund der Nummerierung der Freiheitsgrade — welche durch die Familie $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ gegeben sind —, gehören die Matrixeinträge des unteren rechten Matrixblocks der Lösung $U \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ (vgl. (6.35)) zu den in

$\#\mathcal{I}$	$\tilde{C}_{\text{sp}, \bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}}$	$\tilde{C}_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}}$
63	4	4
127	4	8
255	4	10
511	4	10
1023	4	10
2047	4	10
4095	4	10
8191	4	10
16383	4	10

Tabelle 6.6: $\tilde{C}_{\text{sp}, \bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}}$ und $\tilde{C}_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}}$ für verschiedene Verfeinerungsstufen in $[0, 1]$.

$[0.5, 1] \times [0.5, 1]$ befindlichen Freiheitsgraden. Aus diesem Grund wird der in Abbildung 6.12 dargestellte Teilbaum von $\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ verwendet, dessen Schwachbesetztheitskonstante maximal so groß sein kann, wie die von $\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ — da lediglich Blöcke entfernt wurden. Wir bezeichnen diesen Blockbaum im Folgenden mit $\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^{\text{f}}$ und das künstlich erzeugte — bzw. *fixierte* — Blatt mit b_{f} .

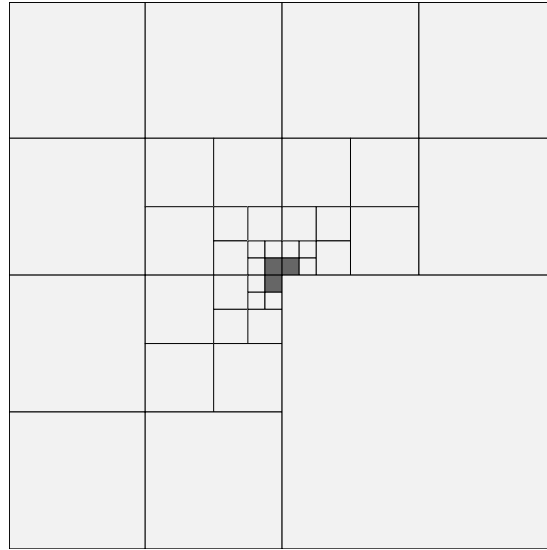


Abbildung 6.12: Teilbaum $\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^{\text{f}}$ von $\bar{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ mit dem künstlich erzeugten Blatt b_{f} .

Die Konstruktion der für das Mehrblockverfahren verwendeten Blockhierarchie ist in Abbildung 6.13 exemplarisch dargestellt. Da beim Lösen das Blatt b_{f} nicht als Freiheitsgrad behandelt wird, entspricht der Blockbaum auf dem größten Level dem aus Abbildung 6.14.

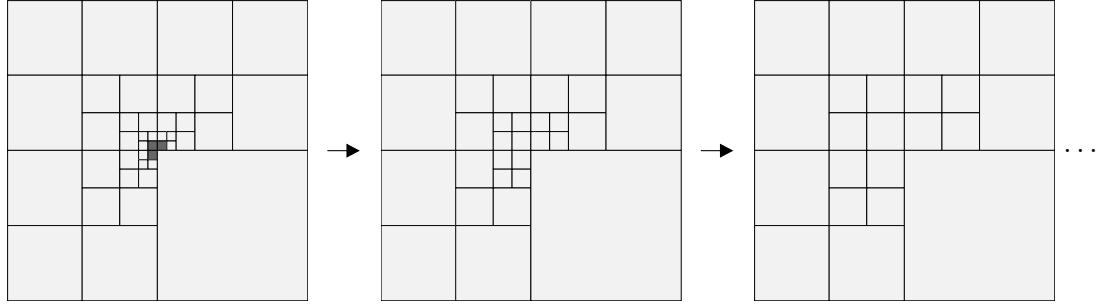


Abbildung 6.13: Drei Schritte der Vergrößerung aus Beispiel 5.4.4 für den Blockbaum $\overline{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^f$.

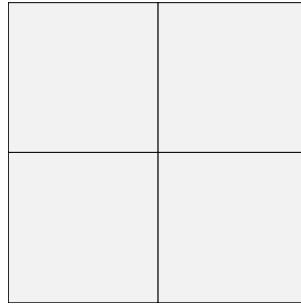


Abbildung 6.14: Blockbaum auf der größten Stufe der verwendeten Blockhierarchie.

Relationsbäume

Wir betrachten nun die Matrix-Galerkin-Clusterrelationen \asymp_A und \asymp_M bzgl. A bzw. M in $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$, welche in diesem Abschnitt von Interesse sind. Da $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein geometrischer Clusterbaum und A sowie M geometrische Matrizen bzgl. der Funktionenfamilie $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ sind, lässt sich Lemma 6.2.1 anwenden. Damit können die Relationsbäume \mathcal{T}_{\asymp_A} und \mathcal{T}_{\asymp_M} als Teilbäume eines bzgl. der Standardzulässigkeitsbedingung (6.14) zulässigen Blockbaums für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ als Zeilen- und Spaltenclusterbaum aufgefasst werden. Der Zulässigkeitsparameter ist hierbei beliebig wählbar, womit der oben definierte Blockbaum $\mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ diese Eigenschaft erfüllt. Nach Tabelle 6.6 ist dieser für die hier verwendeten Verfeinerungsstufen $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}}$ schwachbesetzt mit $C_{\text{sp}, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}} \leq 10$. Somit gilt diese Schwachbesetztheitskonstante auch für \mathcal{T}_{\asymp_A} und \mathcal{T}_{\asymp_M} .

Wir wenden uns nun den benötigten Matrix-Galerkin-Blockrelationsbäumen dieses Abschnitts zu. Da

$$AUM^* + MUA^* = C$$

eine allgemeine Matrixgleichung mit zwei Summanden darstellt, haben wir die Matrix-Galerkin-Blockrelationen $\asymp_{(A,M)}$ und $\asymp_{(M,A)}$ bzgl. A und M bzw. M und A in $\overline{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^f$ zu betrachten. Aufgrund der teilweise künstlichen Konstruktion von $\overline{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^f$ analysieren wir

die Matrix-Galerkin-Blockrelationsbäume bzgl. $\overline{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und wenden die Ergebnisse dann auf $\overline{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^f$ an. Wir bezeichnen diese Relationsbäume bzgl. $\overline{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ im Folgenden mit $\overline{\mathcal{T}}_{\asymp_{(A,M)}}$ und $\overline{\mathcal{T}}_{\asymp_{(M,A)}}$. Den beiden Blockrelationen $\asymp_{(A,M)}$ und $\asymp_{(M,A)}$ liegen jeweils die beiden Clusterrelationen \asymp_A und \asymp_M — lediglich mit vertauschten Rollen — zugrunde. Es ist also ausreichend, die Clusterrelationsbäume \mathcal{T}_{\asymp_A} und \mathcal{T}_{\asymp_M} — wie oben geschehen — hinsichtlich der Schwachbesetztheit zu untersuchen.

Wie zu Beginn dieses Kapitels motiviert und in Abschnitt 6.2.1 für das erste Anwendungsbeispiel bereits durchgeführt, haben wir für den Nachweis der Existenz einer Schwachbesetztheitskonstante für $\overline{\mathcal{T}}_{\asymp_{(A,M)}}$ für alle *zulässigen* Blätter $b' \in \overline{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^+$ und alle $b \in \text{row}^=(\overline{\mathcal{T}}_{\asymp_{(A,M)}}, b')$ die Größe

$$L_1(\overline{\mathcal{T}}_{\asymp_{(A,M)}}, (b', b))$$

sowie für alle *zulässigen* Blätter $b \in \overline{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^+$ und alle $b' \in \text{col}^=(\overline{\mathcal{T}}_{\asymp_{(A,M)}}, b)$ die Größe

$$L_2(\overline{\mathcal{T}}_{\asymp_{(A,M)}}, (b', b))$$

hinsichtlich einer oberen Schranke zu untersuchen. Analog sind diese Werte auch für $\overline{\mathcal{T}}_{\asymp_{(M,A)}}$ abzuschätzen.

Wir werden im folgenden Lemma eine Aussage beweisen, wie sie sich an Lemma 6.2.3 aus Abschnitt 6.2.1 orientiert. Auch hier formulieren wir diese Aussage allgemein, um sie auf die beiden Relationsbäume $\overline{\mathcal{T}}_{\asymp_{(A,M)}}$ und $\overline{\mathcal{T}}_{\asymp_{(M,A)}}$ anwenden zu können.

Lemma 6.2.5 (Beschränktheit). *Seien $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein geometrischer Clusterbaum bzgl. einer Funktionenfamilie $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$, $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ ein geometrischer Clusterbaum bzgl. einer Funktionenfamilie $(\psi_j)_{j \in \mathcal{J}}$ und $\overline{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ der bzgl. der Singularitätszulässigkeitsbedingung (6.37) mit Zulässigkeitsparameter $\bar{\eta} \in \mathbb{R}_{>0}$ zulässige Blockbaum für $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$. Des Weiteren seien $A \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\mathcal{J} \times \mathcal{J}}$ geometrische Matrizen bzgl. $(\varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ bzw. $(\psi_j)_{j \in \mathcal{J}}$, $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ geometrisch kontrahierend bzgl. $C_{\text{geo}} \in \mathbb{R}_{>1}$ und $\ell_{\text{geo}} \in \mathbb{N}$ sowie lokal geometrisch balanciert bzgl. $C_{\text{bal}} \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ und A bzw. B .*

Für den Blockrelationsbaum $\overline{\mathcal{T}}_{\asymp_{(A,B)}}$ mit der zugrundeliegenden Matrix-Galerkin-Blockrelation $\asymp_{(A,B)}$ bzgl. A und B in $\overline{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}$ gilt mit

$$\ell_{\max} := \left\lceil \log_{C_{\text{geo}}} ((1 + \bar{\eta})C_{\text{bal}}) \right\rceil \ell_{\text{geo}} \in \mathbb{N}$$

(a) *für alle $b' \in \overline{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ und $b \in \text{row}^=(\overline{\mathcal{T}}_{\asymp_{(A,B)}}, b')$*

$$L_1(\overline{\mathcal{T}}_{\asymp_{(A,B)}}, (b', b)) \leq \max \{ \ell_{\max} + C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}, \ell_{\max} + C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \}$$

und

(b) *für alle $b \in \overline{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ und $b' \in \text{col}^=(\overline{\mathcal{T}}_{\asymp_{(A,B)}}, b)$*

$$L_2(\overline{\mathcal{T}}_{\asymp_{(A,B)}}, (b', b)) \leq \max \{ \ell_{\max} + C_{L_1, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}}, \ell_{\max} + C_{L_2, \mathcal{T}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}} \}.$$

6 Numerische Beispiele

Beweis. (a) Seien $b' \in \overline{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ und $b \in \text{row}^=(\overline{\mathcal{T}}_{\prec(A,B)}, b')$, dann gilt nach Definition

$$L_1(\overline{\mathcal{T}}_{\prec(A,B)}, (b', b)) = \max_{b^* \in U_1(\overline{\mathcal{T}}_{\prec(A,B)}, (b', b))} \text{level}(b^*) - \text{level}(b')$$

mit

$$U_1(\overline{\mathcal{T}}_{\prec(A,B)}, (b', b)) = \{b^* \in \text{sons}^*(b) \mid (b', b^*) \in \overline{\mathcal{T}}_{\prec(A,B)} \setminus \overline{\mathcal{L}}_{\prec(A,B)}\}. \quad (6.39)$$

Wie im Beweis von Lemma 6.2.3 setzen wir o.B.d.A. $U_1(\overline{\mathcal{T}}_{\prec(A,B)}, (b', b)) \neq \emptyset$ voraus. Sei $b^* \in U_1(\overline{\mathcal{T}}_{\prec(A,B)}, (b', b))$, dann gilt $b^* = (t^*, s^*) \in \text{sons}^*(b)$ und mit $b = (t, s)$ auch $t^* \in \text{sons}^*(t)$ sowie $s^* \in \text{sons}^*(s)$. Da der Beweis dieser Aussage zum Großteil analog zu dem von Lemma 6.2.3 verläuft, werden wir einige Teilschritte nicht ausführlich durchführen.

Wir betrachten nun zuerst den Fall, dass der Levelunterschied zwischen t^* und t sowie zwischen s^* und s echt größer als ℓ_{\max} ist — vgl. mit **Fall 1** aus dem Beweis von Lemma 6.2.3.

Es gelte also $\text{level}(t^*) - \text{level}(t) > \ell_{\max}$ und $\text{level}(s^*) - \text{level}(s) > \ell_{\max}$. Wir zeigen nun, dass unter dieser Voraussetzung $b^* \in \overline{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ folgt. Dies würde somit $(b', b^*) \in \overline{\mathcal{L}}_{\prec(A,B)}$ bedeuten, was nach (6.39) ein Widerspruch zu $b^* \in U_1(\overline{\mathcal{T}}_{\prec(A,B)}, (b', b))$ ist.

Da $b' = (t', s') \in \overline{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ gilt, folgt mit der Singularitätszulässigkeitsbedingung

$$\max\{\text{diam}(Q_{t'}), \text{diam}(Q_{s'})\} \leq \bar{\eta} \max\left\{\text{dist}(Q_{t'}, \{\bar{x}\}), \text{dist}(Q_{s'}, \{\bar{x}\})\right\}. \quad (6.40)$$

Aufgrund von $b^* \in U_1(\overline{\mathcal{T}}_{\prec(A,B)}, (b', b))$ folgt $(b', b^*) \in \overline{\mathcal{T}}_{\prec(A,B)} \setminus \overline{\mathcal{L}}_{\prec(A,B)}$, womit $b' \prec_{(A,B)} b^*$, also $t' \prec_A t^*$ und $s' \prec_B s^*$ gilt. Mit Korollar 6.1.7 bedeutet dies

$$\text{dist}(Q_{t'}, Q_{t^*}) = 0 \quad \text{und} \quad \text{dist}(Q_{s'}, Q_{s^*}) = 0.$$

Unter Verwendung der Dreiecksungleichung gilt

$$\begin{aligned} \text{dist}(Q_{t'}, \{\bar{x}\}) &\leq \underbrace{\text{dist}(Q_{t'}, Q_{t^*})}_{=0} + \text{diam}(Q_{t^*}) + \text{dist}(Q_{t^*}, \{\bar{x}\}) \\ &\leq \max\{\text{diam}(Q_{t^*}), \text{diam}(Q_{s^*})\} + \max\{\text{dist}(Q_{t^*}, \{\bar{x}\}), \text{dist}(Q_{s^*}, \{\bar{x}\})\} \end{aligned}$$

und analog auch

$$\text{dist}(Q_{s'}, \{\bar{x}\}) \leq \max\{\text{diam}(Q_{t^*}), \text{diam}(Q_{s^*})\} + \max\{\text{dist}(Q_{t^*}, \{\bar{x}\}), \text{dist}(Q_{s^*}, \{\bar{x}\})\}.$$

Zusammen folgt dann

$$\begin{aligned} \max\{\text{dist}(Q_{t'}, \{\bar{x}\}), \text{dist}(Q_{s'}, \{\bar{x}\})\} &\leq \max\{\text{diam}(Q_{t^*}), \text{diam}(Q_{s^*})\} \\ &\quad + \max\{\text{dist}(Q_{t^*}, \{\bar{x}\}), \text{dist}(Q_{s^*}, \{\bar{x}\})\} \end{aligned}$$

und mit (6.40) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\bar{\eta} \max\{\text{dist}(Q_{t^*}, \{\bar{x}\}), \text{dist}(Q_{s^*}, \{\bar{x}\})\} &\geq \bar{\eta} \max\{\text{dist}(Q_{t'}, \{\bar{x}\}), \text{dist}(Q_{s'}, \{\bar{x}\})\} \\
&\quad - \bar{\eta} \max\{\text{diam}(Q_{t^*}), \text{diam}(Q_{s^*})\} \\
&\geq \max\{\text{diam}(Q_{t'}), \text{diam}(Q_{s'})\} \\
&\quad - \bar{\eta} \max\{\text{diam}(Q_{t^*}), \text{diam}(Q_{s^*})\}.
\end{aligned} \tag{6.41}$$

Aus $(b', b) \in \overline{\mathcal{T}}_{\prec(A,B)} \setminus \overline{\mathcal{L}}_{\prec(A,B)}$ — aufgrund von $U_1(\overline{\mathcal{T}}_{\prec(A,B)}, (b', b)) \neq \emptyset$ (s.o.) — folgt $b' \prec_{(A,B)} b$ und $b \in \text{row}(\overline{\mathcal{T}}_{\prec(A,B)}, b')$ liefert $\text{level}(b') = \text{level}(b)$. Mit Lemma 4.3.2 bedeutet dies $(t', t) \in \mathcal{T}_{\prec_A}$ sowie $(s', s) \in \mathcal{T}_{\prec_B}$. Es gilt nun $t' \prec_A t$ und $s' \prec_B s$, womit (t', t) und (s', s) unzulässig in \mathcal{T}_{\prec_A} bzw. \mathcal{T}_{\prec_B} sind. Da $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ lokal geometrisch balanciert bzgl. C_{bal} und A bzw. B sind, folgt

$$\text{diam}(Q_{t'}) \geq C_{\text{bal}}^{-1} \text{diam}(Q_t) \quad \text{und} \quad \text{diam}(Q_{s'}) \geq C_{\text{bal}}^{-1} \text{diam}(Q_s). \tag{6.42}$$

Wir setzen

$$i := \left\lceil \log_{C_{\text{geo}}}((1 + \bar{\eta})C_{\text{bal}}) \right\rceil \in \mathbb{N},$$

dann gilt $\ell_{\max} = i\ell_{\text{geo}}$ und mit $i \geq \log_{C_{\text{geo}}}((1 + \bar{\eta})C_{\text{bal}})$ folgt analog zum Beweis von Lemma 6.2.3 (vgl. dort (6.19))

$$\begin{aligned}
&\text{diam}(Q_t) \geq (1 + \bar{\eta})C_{\text{bal}} \text{diam}(Q_{t^*}) \\
&\text{und} \quad \text{diam}(Q_s) \geq (1 + \bar{\eta})C_{\text{bal}} \text{diam}(Q_{s^*}).
\end{aligned} \tag{6.43}$$

Mit (6.42) und (6.43) folgt

$$\begin{aligned}
\max\{\text{diam}(Q_{t'}), \text{diam}(Q_{s'})\} &\geq C_{\text{bal}}^{-1} \max\{\text{diam}(Q_t), \text{diam}(Q_s)\} \\
&\geq C_{\text{bal}}^{-1} \max\{(1 + \bar{\eta})C_{\text{bal}} \text{diam}(Q_{t^*}), (1 + \bar{\eta})C_{\text{bal}} \text{diam}(Q_{s^*})\} \\
&= (1 + \bar{\eta}) \max\{\text{diam}(Q_{t^*}), \text{diam}(Q_{s^*})\}.
\end{aligned}$$

Setzen wir dies in (6.41) ein, so folgt

$$\begin{aligned}
\bar{\eta} \max\{\text{dist}(Q_{t^*}, \{\bar{x}\}), \text{dist}(Q_{s^*}, \{\bar{x}\})\} &\geq \max\{\text{diam}(Q_{t'}), \text{diam}(Q_{s'})\} \\
&\quad - \bar{\eta} \max\{\text{diam}(Q_{t^*}), \text{diam}(Q_{s^*})\} \\
&\geq (1 + \bar{\eta}) \max\{\text{diam}(Q_{t^*}), \text{diam}(Q_{s^*})\} \\
&\quad - \bar{\eta} \max\{\text{diam}(Q_{t^*}), \text{diam}(Q_{s^*})\} \\
&= \max\{\text{diam}(Q_{t^*}), \text{diam}(Q_{s^*})\}.
\end{aligned}$$

Der Block $b^* = (t^*, s^*)$ ist somit im Sinne der Singularitätszulässigkeitsbedingung (6.37) zulässig, was $b^* \in \overline{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{J}}^+$ bedeutet. Dies steht im Widerspruch zu $b^* \in U_1(\overline{\mathcal{T}}_{\prec(A,B)}, (b', b))$, womit die Annahme falsch war und

$$\text{level}(t^*) - \text{level}(t) \leq \ell_{\max} \quad \text{oder} \quad \text{level}(s^*) - \text{level}(s) \leq \ell_{\max}$$

gilt. Die Aussage folgt nun wie im Beweis von Lemma 6.2.3 **Fall 2**, da dort keine speziellen Eigenschaften der Standardzulässigkeitsbedingung, sondern nur allgemeine Eigenschaften von Blockbäumen eingehen.

(b) Auch diese Aussage folgt analog zum Beweis von Lemma 6.2.3 (b) unter Verwendung des transponierten Relationsbaums von $\overline{\mathcal{T}}_{\prec(A,B)}$. \square

Die Aussage dieses Lemmas lässt sich nun auf die Blockrelationsbäume $\overline{\mathcal{T}}_{\prec(A,M)}$ sowie $\overline{\mathcal{T}}_{\prec(M,A)}$ anwenden, da $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ ein geometrischer Clusterbaum, $\overline{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ der bzgl. der Singuläritätszulässigkeitsbedingung zulässige Blockbaum mit $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ als Zeilen- und Spaltenclusterbaum, A und M geometrische Matrizen sowie $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ geometrisch kontrahierend und lokal geometrisch balanciert sind.

Wir betrachten nun das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem bzgl. des künstlich angepassten Blockbaums $\overline{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^f$ aus Abbildung 6.12. Hierzu bezeichnen wir die Blockrelationsbäume bzgl. $\overline{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^f$ mit $\overline{\mathcal{T}}_{\prec(A,M)}^f$ und $\overline{\mathcal{T}}_{\prec(M,A)}^f$. Da b_f nicht als Freiheitsgrad behandelt wird, können Tupel der Form $(b_f, b) \in \overline{\mathcal{T}}_{\prec(A,M)}^f$ und $(b_f, b) \in \overline{\mathcal{T}}_{\prec(M,A)}^f$ ignoriert werden. Beim Aufstellen der Mengen $\overline{\mathcal{L}}_{\prec(A,M)}^{f-}$ und $\overline{\mathcal{L}}_{\prec(M,A)}^{f-}$ mit den in Abschnitt 4.3.2 hergeleiteten Algorithmen vernachlässigen wir somit die Konstruktion von

$$\text{row}_{\mathcal{L}}^-(\overline{\mathcal{T}}_{\prec(A,M)}^f, b_f) \quad \text{und} \quad \text{row}_{\mathcal{L}}^-(\overline{\mathcal{T}}_{\prec(M,A)}^f, b_f). \quad (6.44)$$

Sobald also im Zuge des Algorithmus 4.3.4 ein Aufruf mit einem Tupel

$$(b_f, b) \in \overline{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^f \times \overline{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^f \quad \text{mit} \quad \text{level}(b_f) = \text{level}(b)$$

geschieht, wird keine künstliche Unterteilung von b_f durchgeführt bzw. die Mengen aus (6.44) nicht aktualisiert. Da $\overline{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^f \subseteq \overline{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ gilt, wird der Aufwand des Aufstellens von $\overline{\mathcal{L}}_{\prec(A,M)}^{f-}$ und $\overline{\mathcal{L}}_{\prec(M,A)}^{f-}$ sowie des Assemblierens aller Interaktionsmatrizen somit lediglich geringer. Obige Diskussion für $\overline{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ lässt sich also auf $\overline{\mathcal{T}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^f$ übertragen.

Das Besetzmuster des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems ist in Abbildung 6.15 exemplarisch für zwei unterschiedliche Blöcke dargestellt. Dieses Muster gilt aufgrund der tridiagonalen Struktur von A und M sowohl für $\overline{\mathcal{L}}_{\prec(A,M)}^{f-}$ als auch für $\overline{\mathcal{L}}_{\prec(M,A)}^{f-}$. In numerischen Tests betrug die Zeit, die zum Aufstellen dieser Mengen benötigt wurde für die hier verwendeten Verfeinerungsstufen weniger als eine Sekunde. Da die Zeitmessungen in diesen Größenordnungen potentiellen Ungenauigkeiten unterliegen, wird an dieser Stelle auf eine Darstellung der Ergebnisse verzichtet.

Tabelle 6.7 stellt den Wert

$$C_{\text{row}_{\mathcal{L}}} := \max_{b' \in \overline{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^f \setminus \{b_f\}} \# \text{row}_{\mathcal{L}}^-(\overline{\mathcal{T}}_{\prec(A,M)}^f, b')$$

dar, also die maximale Anzahl von Nicht-Null-Koeffizienten des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems für ein festes Blatt des Blockbaums. Diese Werte entsprechen — wieder aufgrund der Struktur der Matrizen A und M — denen des Baums $\overline{\mathcal{T}}_{\prec(M,A)}^f$.

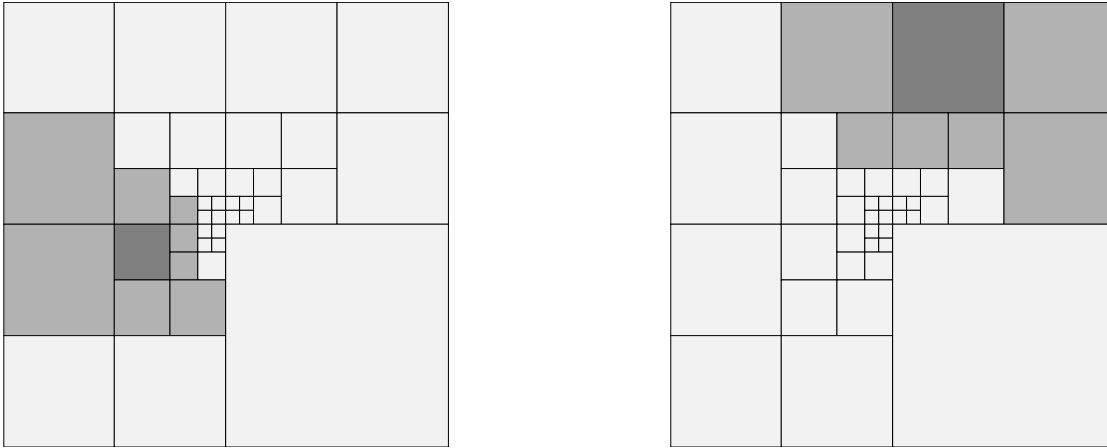


Abbildung 6.15: Exemplarisch dargestelltes Besetztheitsmuster für zwei unterschiedliche Blöcke, wobei die Markierungen unzulässiger Blätter weggelassen wurden (vgl. mit Abbildung 6.12).

$\#\mathcal{I}$	$C_{\text{row}_{\mathcal{L}}}$
63	9
127	9
255	9
511	9
1023	9
2047	9
4095	9
8191	9
16383	9

Tabelle 6.7: Maximale Anzahl an Nicht-Null-Koeffizienten des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems für einen beliebigen Block aus $\overline{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^{\text{f}} \setminus \{b_{\text{f}}\}$ und für verschiedene Verfeinerungsstufen.

Clusterbasis

Die Konstruktion der Clusterbasis verläuft hier analog zu der aus Abschnitt 6.2.1. Seien dazu $K_{\mathcal{I}}$ eine Rangverteilung und $(\xi_{t,j})_{j \in K_t}$ sowie $(\mathcal{L}_{t,j})_{j \in K_t}$ für alle $Q_t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ die Tschebyscheff-Interpolationspunkte bzw. die zugehörige Familie von Lagrange-Polynomen. Die Clusterbasismatrizen $V_t \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times K_t}$ für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ entstehen dann wieder über die Auswertung der Lagrange-Polynome in den jeweiligen Gitterpunkten

$$(V_t)_{ij} := \begin{cases} \mathcal{L}_{t,j}(x_i) & , \text{ falls } i \in \hat{t}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $(i, j) \in \mathcal{I} \times K_t$ und die Transformmatrizen über das Einsetzen der Tschebyscheff-Punkte in das Interpolationspolynom des Vaters. Dies führt dann auf eine geschachtelte Clusterbasis $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$. Für die Orthogonalisierung wird ebenfalls wieder [6, Algorithmus 16] verwendet.

Die Wahl dieser Clusterbasis lässt sich wie folgt motivieren. Das Ziel in diesem Anwendungsbeispiel ist die Berechnung einer Approximation der diskreten Lösung

$$u_h = \sum_{k,l \in \mathcal{I}} u_{h,kl}(\varphi_k \otimes \varphi_l).$$

Wir betrachten einen Block $b = (t, s) \in \bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^f \setminus \{b_f\}$ und nähern u_h in diesem Block durch eine Interpolation an. Dies führt also für alle $(x, y) \in Q_t \times Q_s$ auf eine Darstellung der Form

$$u_h(x, y) \approx \sum_{\nu \in K_t} \sum_{\mu \in K_s} u_h(\xi_{t,\nu}, \xi_{s,\mu}) \mathcal{L}_{t,\nu}(x) \mathcal{L}_{s,\mu}(y). \quad (6.45)$$

Sei $(i, j) \in \hat{t} \times \hat{s}$, dann gilt für die Gitterpunkte nach Konstruktion des Clusterbaums $(x_i, x_j) \in Q_t \times Q_s$ sowie

$$u_h(x_i, x_j) = \sum_{k,l \in \mathcal{I}} u_{h,kl}(\varphi_k \otimes \varphi_l)(x_i, x_j) = \sum_{k,l \in \mathcal{I}} u_{h,kl} \varphi_k(x_i) \varphi_l(x_j) = u_{h,ij}.$$

Diese Darstellung in (6.45) eingesetzt liefert

$$u_{h,ij} \approx \sum_{\nu \in K_t} \sum_{\mu \in K_s} u_h(\xi_{t,\nu}, \xi_{s,\mu}) \mathcal{L}_{t,\nu}(x_i) \mathcal{L}_{s,\mu}(x_j).$$

Wir definieren die Matrix $S_b \in \mathbb{R}^{K_t \times K_s}$ über

$$(S_b)_{\nu\mu} := u_h(\xi_{t,\nu}, \xi_{s,\mu}) \quad (6.46)$$

für alle $(\nu, \mu) \in K_t \times K_s$, dann gilt mit der Definition der Clusterbasismatrizen

$$\begin{aligned} u_{h,ij} &\approx \sum_{\nu \in K_t} \sum_{\mu \in K_s} u_h(\xi_{t,\nu}, \xi_{s,\mu}) \mathcal{L}_{t,\nu}(x_i) \mathcal{L}_{s,\mu}(x_j) = \sum_{\nu \in K_t} \sum_{\mu \in K_s} (S_b)_{\nu\mu} (V_t)_{i\nu} (V_s)_{j\mu} \\ &= \sum_{\nu \in K_t} \sum_{\mu \in K_s} (V_t)_{i\nu} (S_b)_{\nu\mu} (V_s^*)_{\mu j} = (V_t S_b V_s^*)_{ij}. \end{aligned}$$

Für alle Blätter des Blockbaums sind die Kopplungsmatrizen die Unbekannten, die mit dem Matrix-Galerkin-Verfahren berechnet werden. Es werden somit nach (6.46) also gerade die Auswertungen der Funktion u_h in den gewählten Interpolationspunkten bestimmt. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass u_h in Gebieten, die weiter entfernt von der Singularität \bar{x} aus (6.36) liegen, gut durch die oben beschriebene Approximation dargestellt werden kann. Diese Tatsache spiegelt sich allein in der Größe der Blöcke aus $\bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^f$ wider, womit eine Unterscheidung in zulässige und unzulässige Blätter nicht zwingend notwendig ist. Es braucht also nicht sichergestellt zu werden, dass die Clusterbasis in den Blättern von $\mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ vollen Rang besitzt (vgl. Bemerkung 4.1.7). Aus diesem Grund ist $n_{\min} = 20$ unabhängig vom gewählten Rang verwendbar.

Zum Assemblieren des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems dienen die in Abschnitt 4.3.3 definierten Algorithmen. Da sich auch die Zeiten zum Assemblieren aller durch $\bar{\mathcal{L}}_{\prec(A,M)}^{f-}$ und $\bar{\mathcal{L}}_{\prec(M,A)}^{f-}$ gegebenen Interaktionsmatrizen zusammen für die hier verwendeten Verfeinerungsstufen in den durchgeführten Experimenten unterhalb von einer Sekunde befunden haben, wird an dieser Stelle ebenfalls auf eine Darstellung dieser Zeiten verzichtet.

Rechte Seite

Für die rechte Seite des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems sind für alle $b = (t, s) \in \bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^f \setminus \{b_f\}$ die Matrizen

$$V_t^* C V_s \in \mathbb{R}^{K_t \times K_s}$$

zu berechnen, wobei

$$c_{ij} = \int_0^1 \varphi_i(z) \, dz \int_0^1 \varphi_j(z) \, dz$$

für alle $i, j \in \mathcal{I}$ gilt. Im Folgenden wird die komplette Menge $\bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^f$, also inklusive des Blocks $b_f = (t_f, s_f)$, betrachtet und die Matrix

$$V_{t_f}^* C V_{s_f} \in \mathbb{R}^{K_{t_f} \times K_{s_f}}$$

dann in der konkreten Implementierung ignoriert.

Setzen wir $R \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ über

$$(R)_i := \int_0^1 \varphi_i(z) \, dz$$

für alle $i \in \mathcal{I}$, dann gilt für alle $i, j \in \mathcal{I}$

$$(RR^*)_{ij} = (R)_i (R)_j = \int_0^1 \varphi_i(z) \, dz \int_0^1 \varphi_j(z) \, dz = c_{ij}.$$

Es folgt $C = RR^*$, womit die rechte Seite eine Niedrigrangmatrix von Rang eins ist.

Wir fixieren nun eine Rangverteilung $(L_t)_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ mit $\#L_t = 1$ für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ und setzen

$$W_t := \chi_t R \in \mathbb{R}^{\mathcal{I} \times L_t}$$

6 Numerische Beispiele

für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ sowie

$$F_{t^*} := (1) \in \mathbb{R}^{L_{t^*} \times L_t}$$

für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$ und $t^* \in \text{sons}(t)$. Aufgrund der Darstellung der Beschriftung eines Clusters über die disjunkte Vereinigung der Beschriftungen aller Söhne gilt für alle $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}} \setminus \mathcal{L}_{\mathcal{I}}$

$$\sum_{t^* \in \text{sons}(t)} \chi_{t^*} = \sum_{t^* \in \text{sons}(t)} \sum_{i \in \hat{t}^*} e_i e_i^* = \sum_{i \in \hat{t}} e_i e_i^* = \chi_t$$

und damit

$$\sum_{t^* \in \text{sons}(t)} W_{t^*} F_{t^*} = \sum_{t^* \in \text{sons}(t)} \chi_{t^*} R = \left(\sum_{t^* \in \text{sons}(t)} \chi_{t^*} \right) R = \chi_t R = W_t.$$

Die Clusterbasis $(W, F, L)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}} := ((W_t)_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}, (F_t)_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}}, (L_t)_{t \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}}})$ ist also geschachtelt. Mit

$$S_b := (1) \in \mathbb{R}^{L_t \times L_s}$$

für alle $b = (t, s) \in \overline{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^f$ folgt

$$W_t S_b W_s^* = (\chi_t R)(\chi_s R)^* = \chi_t R R^* \chi_s = \chi_t C \chi_s$$

für alle $b = (t, s) \in \overline{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^f$ und damit nach Korollar 3.3.3 über die blockweise Darstellung einer Matrix

$$C = \sum_{b=(t,s) \in \overline{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^f} \chi_t C \chi_s = \sum_{b=(t,s) \in \overline{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^f} W_t S_b W_s^*. \quad (6.47)$$

Die rechte Seite lässt sich also *exakt* in einem \mathcal{H}^2 -Matrix-Format darstellen, womit die Berechnung von

$$V_t^* C V_s \in \mathbb{R}^{K_t \times K_s}$$

für alle $b = (t, s) \in \overline{\mathcal{L}}_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}^f$ einer *Projektion* der \mathcal{H}^2 -Matrix aus (6.47) auf die dem Matrix-Galerkin-Verfahren zugrundeliegende Clusterbasis $(V, E, K)_{\mathcal{T}_{\mathcal{I}}}$ entspricht (vgl. [6, Abschnitt 5.3]). Aus diesem Grund lässt sich [6, Algorithmus 14] zum Aufstellen der rechten Seite verwenden.

Ergebnisse

Wir betrachten die relative Energienorm des Fehlers. In dem vorliegenden Fall — also mit der hier verwendeten Bilinearform — entspricht dies gerade dem relativen Fehler in der H^1 -Seminorm — siehe. z.B. [15, Kapitel II §1] für eine Definition dieser Seminorm —, welche wir im Folgenden mit $|\cdot|_V$ bezeichnen werden. Neben der kontinuierlichen Lösung $u \in V$ und der diskreten Lösung $u_h \in V_h$ bezeichnen wir mit $\tilde{u}_h \in V_h$ die durch das Matrix-Galerkin-Verfahren berechnete Näherung von u_h .

Wir sind also an dem Verhalten des Ausdrucks

$$\frac{|u - \tilde{u}_h|_V}{|u|_V}$$

interessiert. Da die kontinuierliche Lösung u unbekannt ist — also nicht explizit als Referenzlösung vorliegt —, wurde der Wert $|u|_V$ numerisch angenähert. Hierzu wurde das L-Gebiet Ω_L mit einer regelmäßigen globalen Verfeinerungsstrategie in ein Vierecksgitter zerlegt und die Lösung auf diesem mit *bilinearen Elementen* (siehe z.B. [15, Kapitel II §5]) approximiert. Tabelle 6.8 gibt die Näherungen von $|u|_V$ für verschiedene Verfeinerungsstufen an. Auf Basis dieser Rechnungen wurde

$$|u|_V \approx 0.1156707 \quad (6.48)$$

als Referenzwert der weiteren numerischen Untersuchung zugrundegelegt.

Freiheitsgrade in Ω_L	$ u _V \approx$
195585	0.1156666193
784385	0.1156692651
3141633	0.1156702291
12574721	0.1156705902
50315265	0.1156707281
201293825	0.1156707814

Tabelle 6.8: Mit bilinearen Elementen berechnete Näherungen von $|u|_V$ auf dem L-Gebiet Ω_L für verschiedene globale Verfeinerungsstufen.

Beim Lösen des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems wurden mit dem Nullvektor als Startvektor solange Iterationsschritte des pcg-Verfahrens durchgeführt, bis das relative Residuum eine Genauigkeit von mindestens 10^{-8} erreicht hatte.

Im Folgenden werden zwei unterschiedliche Strategien für die Wahl des lokalen Rangs auf den einzelnen Verfeinerungsstufen betrachtet. Zum einen ein — pro Verfeinerungsstufe — global konstanter Rang und zum anderen ein in Abhängigkeit des Clusterlevels variabler Rang.

Konstanter Rang

Wir betrachten zuerst die Ergebnisse für die Wahl eines — pro Verfeinerungsstufe — global konstanten Rangs. Tabelle 6.9 zeigt in den Spalten fünf und sechs das Verhalten des relativen Energiefehlers sowie dessen Konvergenzrate. Der Wert in der letzten Zeile ist in Klammern gesetzt, da sich die dortige Verfeinerungsstufe schon relativ nah an derjenigen befindet, welche zur Berechnung des Referenzwerts aus (6.48) verwendet wurde. In den ersten drei Spalten sind die jeweiligen Freiheitsgrade aufgetragen. Spalte eins zeigt die Anzahl der globalen Freiheitsgrade des L-Gebiets, welche sich über das Tensorgebiet $[0, 1] \times [0, 1]$ (vgl. Abbildung 6.9) ergeben, wobei die hierfür verwendete Anzahl an inneren Gitterpunkten in $[0, 1]$ in Spalte zwei angegeben ist. Spalte drei gibt die Freiheitsgrade des Matrix-Galerkin-Verfahrens an, also die Gesamtanzahl aller Koeffizienten der gesuchten Familie von Kopplungsmatrizen — auf dem feinsten Level der Blockhierarchie.

6 Numerische Beispiele

Die Anzahl der erforderlichen Schritte sowie die zum Lösen benötigte Zeit in Sekunden sind in den letzten beiden Spalten aufgetragen. Nach jeder Verfeinerungsstufe wurde der Rang — also die verwendete Anzahl an lokalen Interpolationspunkten — global um eins erhöht, wie an Spalte vier zu erkennen ist.

Freiheitsgrade			Rang	$ u - \tilde{u}_h _V / u _V$		Schritte	Zeit (s)
Ω_L	$[0, 1]$	Mat.-Gal.					
2945	63	300	5	$4.455630e - 02$		12	0.02
12033	127	756	6	$2.471317e - 02$	1.80	13	0.04
48641	255	1470	7	$1.430419e - 02$	1.73	14	0.16
195585	511	2496	8	$8.500829e - 03$	1.68	17	0.51
784385	1023	3888	9	$5.125201e - 03$	1.66	20	1.40
3141633	2047	5700	10	$3.092586e - 03$	1.66	24	3.70
12574721	4095	7986	11	$1.820122e - 03$	1.70	30	9.61
50315265	8191	10800	12	$9.618250e - 04$	(1.89)	40	24.89

Tabelle 6.9: Relativer Fehler in der Energienorm und benötigte Zeit — in Sekunden — sowie Schritte zum Lösen des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems für verschiedene Verfeinerungsstufen und Ränge.

Tabelle 6.10 zeigt, wie sich der relative Energiefehler — auch mit (6.48) als Referenzwert für $|u|_V$ — bzgl. einer globalen Verfeinerungsstrategie des L-Gebiets und einer mit bilinearen Elementen berechneten diskreten Lösung u_h verhält. Die Konvergenzrate des letzten Werts ist aus dem gleichen Grund wie oben in Klammern gesetzt. Es ist zu erkennen, dass diese Werte fast exakt denen aus Tabelle 6.9 entsprechen. Das Matrix-Galerkin-Verfahren berechnet somit mit weniger Freiheitsgraden eine Approximation der diskreten Lösung, deren Fehler sich in der gleichen Größenordnung wie der bzgl. einer globalen Verfeinerung im Zweidimensionalen befindet.

Freiheitsgrade in Ω_L	$ u - u_h _V / u _V$	
2945	$4.252329e - 02$	
12033	$2.429740e - 02$	1.75
48641	$1.422031e - 02$	1.71
195585	$8.483268e - 03$	1.68
784385	$5.120573e - 03$	1.66
3141633	$3.090650e - 03$	1.66
12574721	$1.818782e - 03$	1.70
50315265	$9.611068e - 04$	(1.89)

Tabelle 6.10: Relativer Fehler in der Energienorm für eine mit bilinearen Elementen bzgl. einer globalen Verfeinerungsstrategie berechnete Näherungslösung u_h .

Variabler Rang

Die hier verwendete Vorgehensweise orientiert sich stark an dem Grundkonzept der *hp-Verfahren*– siehe z.B. [45] für eine Betrachtung dieser Verfahren. Auch dort ist die Idee, Lösungen von partiellen Differentialgleichungen mit lokal unterschiedlich hohen Polynomgraden (p) und unterschiedlich feinen Gitterweiten (h) zu approximieren. Hierbei werden auf Teilgebieten mit größeren Gitterweiten höhere Polynomgrade verwendet, da die Lösung dort potentiell „glatt“ ist. Auf Gebieten kleinerer Gitterweiten hingegen kommen niedrigere Polynomgrade zum Einsatz, da aufgrund der dortigen niedrigeren Regularität ein höherer Grad keine bzw. nur eine marginale Verbesserung der Approximationsgüte nach sich zieht.

Für die vorherigen numerischen Tests aus Tabelle 6.9 wurde der Rang — also die Interpolationsordnung — für jede Verfeinerungsstufe global über den gesamten Clusterbaum festgehalten (siehe dort Spalte vier). Übertragen wir die oben skizzierte Idee von *hp-Verfahren* nun auf unsere Betrachtungen, so bedeutet dies die Verwendung unterschiedlicher Interpolationsordnungen zur Konstruktion der Clusterbasis $V_{\mathcal{T}_I}$.

Die zu größeren Blöcken gehörenden Clusterbasismatrizen zeichnen sich dadurch aus, dass sich die zugehörigen Cluster auf einer größeren Stufe im Clusterbaum befinden. Aus diesem Grund wird der Rang bzw. die Interpolationsordnung in Abhängigkeit des Levels im Clusterbaum \mathcal{T}_I gewählt. Konkret bedeutet dies die Wahl von $c_0 \in \mathbb{N}_0$, $c_1 \in \mathbb{N}$ sowie einer Rangverteilung $K_{\mathcal{T}_I}$ mit

$$\#K_t = c_0 + c_1 (\text{depth}(\mathcal{T}_I) - \text{level}(t)) \quad (6.49)$$

für alle $t \in \mathcal{T}_I$. Die Wahl dieses levelabhängigen Rangs orientiert sich an [6, Abschnitt 4.7]. Der Wert c_0 definiert somit den Rang in den Blättern auf der höchsten Stufe des Clusterbaums und c_1 die Rate, mit der dieser stufenweise wächst. Da in diesem Fall die Bedingung $\#K_t \leq \#K_{t^*}$ für alle $t \in \mathcal{T}_I \setminus \mathcal{L}_I$ und $t^* \in \text{sons}(t)$ i.A. nicht gilt, ist die resultierende Clusterbasis nicht zwangsläufig geschachtelt. Es lässt sich aber zeigen, dass die hier verwendete Konstruktion der Clusterbasismatrizen einer *Reinterpolation* der Lagrange-Polynome eines Clusters über die entsprechenden Polynome in den Söhnen entspricht. Für eine Diskussion dieser Reinterpolationstechnik sei auf [6, Abschnitt 4.7] verwiesen. Für die Werte

$$c_0 := 5 \quad \text{und} \quad c_1 := 1$$

sind die resultierenden numerischen Ergebnisse in Tabelle 6.11 dargestellt. Im Vergleich zu Tabelle 6.9 fehlt aufgrund der variablen Wahl des Rangs lediglich Spalte vier. Es ist zu erkennen, dass die Qualität der Konvergenzrate bzgl. des relativen Energiefehlers vergleichbar mit der aus Tabelle 6.9 ist. Es entstehen allerdings leichte Abweichungen in den tatsächlichen Fehlertermen auf den einzelnen Verfeinerungsstufen. Dies ließe sich z.B. mit einer Erhöhung von c_0 beheben. Des Weiteren ist zu erkennen, dass sich die Anzahl der Freiheitsgrade des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems und damit auch die Zeit zum Lösen auf jeder Stufe verringert.

Freiheitsgrade			$ u - \tilde{u}_h _V / u _V$		Schritte	Zeit (s)
Ω_L	$[0, 1]$	Mat.-Gal.				
2945	63	300	$4.455630e - 02$		12	0.01
12033	127	624	$2.572292e - 02$	1.73	13	0.04
48641	255	1065	$1.518830e - 02$	1.69	13	0.11
195585	511	1641	$9.126520e - 03$	1.66	15	0.31
784385	1023	2370	$5.542709e - 03$	1.65	20	0.85
3141633	2047	3270	$3.367462e - 03$	1.65	23	1.97
12574721	4095	4359	$2.004587e - 03$	1.68	30	4.88
50315265	8191	5655	$1.097848e - 03$	(1.83)	40	11.94

Tabelle 6.11: Relativer Fehler in der Energienorm und benötigte Zeit — in Sekunden — sowie Schritte zum Lösen des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems für verschiedene Verfeinerungsstufen mit einer nach (6.49) — für $c_0 = 5$ und $c_1 = 1$ — variablen Wahl der Ränge.

7 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde ein neuartiger Ansatz zum approximativen Lösen von linearen Matrixgleichungen unter Verwendung von \mathcal{H}^2 -Matrizen präsentiert. Hierbei ist ein matrixwertiges Gleichungssystem — das Matrix-Galerkin-Gleichungssystem — über eine Galerkin-Variationsformulierung hergeleitet worden. Die Unbekannten dieses Systems sind dann durch die Familie von Kopplungsmatrizen der zu berechnenden \mathcal{H}^2 -Matrix gegeben. Basierend auf den diesem Ansatz zugrundeliegenden Strukturen — vor allem Cluster- und Blockbäume — wurde in Kapitel 4 mit vererbbaaren Relationen ein Rahmen vorgestellt, welcher sich zur theoretischen Beschreibung des hier vorgestellten Ansatzes eignet.

Die in Abschnitt 4.3 bereitgestellten effizienten Algorithmen ermöglichen es, das resultierende Gleichungssystem unter geeigneten Voraussetzungen in optimaler Komplexität — also mit einem in der Anzahl der Freiheitsgrade asymptotisch linearen Aufwand — zu konstruieren. Durch die Anwendung der in Kapitel 5 vorgestellten Lösungsstrategien wurde in Kapitel 6 dann abschließend das numerische Verhalten dieses neuen Verfahrens anhand zweier Beispiele illustriert.

In Kapitel 4, welches den Kern dieser Arbeit darstellt, sind ein Großteil der Aussagen und Konzepte mit allgemeinen Relationen formuliert. Die im Zusammenhang mit dem Matrix-Galerkin-Verfahren benötigten Aussagen ergeben sich dann über den Spezialfall einer vorliegenden Matrix-Galerkin-Relation. Fundamental für die Betrachtungen in Kapitel 4 ist die Vererbbarkeitseigenschaft von Relationen. Hierbei ist es allerdings für viele der dortigen Aussagen nicht notwendig, dass die zu betrachtenden Relationen über Matrizen definiert sind. Das vorgestellte Konzept ließe sich also potentiell auf allgemeinere Operatoren — z.B. auf Tensoren — erweitern. Auch die in Abschnitt 4.3.3 beschriebenen Assemblierungstechniken sind verallgemeinerbar. Es wird dort lediglich ein Informationsaustausch zwischen den Hierarchiestufen des Clusterbaums benötigt. Die Tatsache, dass dieser Austausch in dem dort betrachteten Fall durch Transfermatrizen — also durch lineare Abbildungen — gegeben ist, ist ebenfalls unerheblich. In welchem Umfang sich nun Aussagen sowie vorgestellte Konzepte konkret für allgemeinere Frage- bzw. Problemstellungen anpassen lassen, wäre weiter zu untersuchen.

Die Disjunktheit der Beschriftungen von Blättern des Blockbaums ist eine strukturell fundamentale Eigenschaft von \mathcal{H}^2 -Matrizen. Betrachten wir das Beispiel aus Abschnitt 6.2.2, dann bedeutet dies, dass es nicht zwangsläufig einen *glatten* Übergang der berechneten Lösung zwischen benachbarten Blättern geben muss. Es wäre also zu untersuchen, wie sich das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren — in der Theorie sowie in numerischen Tests — verhält, wenn wir die Existenz *überlappender Blöcke* zulassen. Dies führt dann allerdings dazu, dass es i.A. keine eindeutigen Pfade mehr von einem Knoten zu seinen Nachfahren gibt, also die so erzeugten Strukturen keine Bäume mehr darstellen. Eine

Technik dieser Art wurde in [10] — in Zusammenhang mit Integraloperatoren — vorgestellt und analysiert. Evtl. ließe sich die dortige Idee der Verwendung einer *hierarchischen Partition der Eins* — vgl. hierzu auch [1] — ebenfalls auf das Matrix-Galerkin-Verfahren anwenden. Diese Vorgehensweise ist Bestandteil aktueller Forschung für die Konstruktion einer aus den Analysen in [46] über *stochastische partielle Differentialgleichungen* resultierenden Matrixgleichung der Form $AXA^* = C$. Für ein Modellbeispiel entspricht A — wie in Abschnitt 6.2.2 — der Finite-Elemente-Steifigkeitsmatrix des eindimensionalen Laplace-Operators.

Betrachten wir die numerischen Ergebnisse aus Abschnitt 6.2.2, dann ist zu erkennen, dass dort sowohl das Aufstellen sowie das Lösen des Matrix-Galerkin-Gleichungssystems mit einem relativ geringen Zeitaufwand möglich ist. Allerdings verhält sich die *Kondition* des zugrundeliegenden Operators — welcher durch die dortige Matrixgleichung definiert wird — wie die Kondition der Finite-Elemente-Steifigkeitsmatrix A des eindimensionalen Laplace-Operators. Mit der Gitterweite $h \in \mathbb{R}_{>0}$ ergibt sich hierfür ein Wert in der Größenordnung von h^{-2} . Auf der in Abschnitt 6.2.2 verwendeten höchsten Verfeinerungsstufe — also mit $N = 8191$ Freiheitsgraden in $[0, 1]$ — gilt $h^{-2} = (N+1)^2 \approx 6.7 \cdot 10^7$. Wir sind nun zwar in der Lage, mit dem Matrix-Galerkin-Verfahren auch in höheren Dimensionen — also mit kleineren Gitterweiten — eine hinreichend genaue Lösung der Matrixgleichung in vertretbarer Zeit zu berechnen, müssen dafür aber mit Operatoren arbeiten, die potentiell eine hohe Konditionszahl aufweisen. Es wäre somit zu untersuchen, ob bzw. wie die Kondition der Matrixgleichung — bzw. des entsprechenden Operators — evtl. vor dem Übergang zum Matrix-Galerkin-Gleichungssystem verbessert werden kann und welche Auswirkungen dies auf die verwendeten Lösungsverfahren hat. Ein besonderer Fokus sollte hierbei allerdings auf dem Erhalt der schwachbesetzten Struktur des resultierenden Gleichungssystems liegen. Unter Umständen könnten sich dafür auch wieder \mathcal{H} - oder \mathcal{H}^2 -Matrix-Techniken eignen. Die oben beschriebenen Schwierigkeiten treten auch bei der Matrixgleichung $AXA^* = C$ (s.o.) auf, wobei sich zeigen lässt, dass die Kondition hier ein zu h^{-4} proportionales Verhalten aufweist. Da dieser Wert schon für moderat kleine Gitterweiten groß wird, ist die Vorkonditionierung bzgl. dieser Matrixgleichung von noch größerem Interesse (vgl. auch [21]).

Wie an den numerischen Ergebnissen aus Abschnitt 6.2.1 zu erkennen ist, muss für die Berechnung einer genaueren Lösung — bzgl. eines entsprechenden Qualitätsmerkmals — der Rang der Clusterbasis in größeren Dimensionen erhöht werden. Dies geschieht in Abschnitt 6.2.1 global, also für alle Clusterbasismatrizen in gleichem Maße. Bei den in [6, Abschnitt 10.5] verwendeten Techniken zur Berechnung einer approximativen Inversen, wird der lokale Rang aufgrund algebraischer Kenngrößen adaptiv gewählt. Übertragen wir diesen Ansatz auf das Matrix-Galerkin-Verfahren, dann bedeutet dies, den Rang nicht global, sondern nur in Clustern zu erhöhen, die zu Blöcken mit einem großen lokalen Fehler gehören. Hierbei wäre dann ein Kriterium bzw. ein *lokaler Fehlerschätzer* zu entwickeln, um herauszufinden, wo der Fehler groß bzw. klein ist. Analog zu dem Grundgedanken der *hp*-Verfahren könnte evtl. anstatt einer Erhöhung des Rangs auch eine Verfeinerung des Blockbaums — also die weitere Unterteilung zulässiger Blöcke in Söhne — zu einer besseren Approximationsgüte führen. Welche dieser beiden Strategien oder inwieweit eine Kombination beider Techniken zu einer genaueren Lösung führt, wäre

ebenfalls weiter zu untersuchen.

Danksagung

Ich danke Prof. Dr. Steffen Börm für die Möglichkeit zur Promotion in der Arbeitsgruppe *Scientific Computing* und die damit verbundenen Erfahrungen im Rahmen meiner Forschungs- sowie Lehrtätigkeit.

Literaturverzeichnis

- [1] I. Babuška and J. M. Melenk. The partition of unity method. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 40:727–758, 1997.
- [2] R. H. Bartels and G. W. Stewart. Solution of the matrix equation $AX + XB = C$. *Communications of the ACM*, 15(9):820–826, 1972.
- [3] M. Bebendorf and W. Hackbusch. Existence of \mathcal{H} -matrix approximants to the inverse FE-matrix of elliptic operators with L^∞ -coefficients. *Numer. Math.*, 95:1–28, 2003.
- [4] S. Börm. \mathcal{H}^2 -matrix arithmetics in linear complexity. *Computing*, 77(1):1–28, 2005.
- [5] S. Börm. Approximation of solution operators of elliptic partial differential equations by \mathcal{H} - and \mathcal{H}^2 -matrices. *Numer. Math.*, 115(2):165–193, 2010.
- [6] S. Börm. *Efficient Numerical Methods for Non-local Operators: \mathcal{H}^2 -Matrix Compression, Algorithms and Analysis*, volume 14 of *EMS Tracts in Mathematics*. EMS, 2010.
- [7] S. Börm and L. Grasedyck. Low-rank approximation of integral operators by interpolation. *Computing*, 72:325–332, 2004.
- [8] S. Börm and W. Hackbusch. \mathcal{H}^2 -matrix approximation of integral operators by interpolation. *Appl. Numer. Math.*, 43:129–143, 2002.
- [9] S. Börm and K. Reimer. Efficient arithmetic operations for rank-structured matrices based on hierarchical low-rank updates. *Computing and Visualization in Science*, 16(6):247–258, 2015.
- [10] S. Börm and S. A. Sauter. BEM with linear complexity for the classical boundary integral operators. *Math. Comp.*, 74:1139–1177, 2004.
- [11] S. Bosch. *Linear Algebra*. Springer-Lehrbuch. Springer, 5th edition, 2014.
- [12] A. Bouhamidi and K. Jbilou. A note on the numerical approximate solutions for generalized Sylvester matrix equations with applications. *Appl. Math. Comput.*, 206(2):687–694, 2008.
- [13] D. Boysen and S. Börm. A Galerkin approach for solving matrix equations with hierarchical matrices. *PAMM*, 13(1):405–406, 2013.

- [14] M. Braack and N. Taschenberger. Hierarchical a posteriori residual based error estimators for bilinear finite elements. *Int. J. Numer. Anal. Model.*, 10(2):466–480, 2013.
- [15] D. Braess. *Finite Elemente*. Springer, 4th edition, 2007.
- [16] C. Carstensen and R. Verfürth. Edge residuals dominate a posteriori error estimates for low order finite element methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 36(5):1571–1587, 1999.
- [17] J. Céa. Approximation variationnelle des problèmes aux limites. *Ann. Inst. Fourier*, 14(2):345–444, 1964.
- [18] B. N. Datta. Linear and numerical linear algebra in control theory: some research problems. *Linear Algebra and its Applications*, 197–198(0):755–790, 1994.
- [19] Arbeitsgruppe Scientific Computing der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel. H2Lib. <http://www.h2lib.org/>.
- [20] M. Dobrowolski. *Angewandte Funktionalanalysis*. Springer, 2006.
- [21] J. Dölz, H. Harbrecht, and C. Schwab. Covariance regularity and \mathcal{H} -matrix approximation for rough random fields. Technical Report 2014-19, Seminar for Applied Mathematics, ETH Zürich, 2014.
- [22] M. Faustmann, J. M. Melenk, and D. Praetorius. \mathcal{H} -matrix approximability of the inverses of FEM matrices. *Numerische Mathematik*, pages 1–28, 2015.
- [23] Z. Gajic and M. T. J. Qureshi. *Lyapunov Matrix Equation in System Stability and Control*. Dover Books on Engineering Series. Dover Publications, 2008.
- [24] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, London, 1996.
- [25] L. Grasedyck. *Theorie und Anwendungen Hierarchischer Matrizen*. Doctoral thesis, Universität Kiel, 2001.
- [26] L. Grasedyck. Existence of a low-rank or \mathcal{H} -matrix approximant to the solution of a Sylvester equation. *Numer. Lin. Alg. Appl.*, 11:371–389, 2004.
- [27] L. Grasedyck and W. Hackbusch. Construction and arithmetics of \mathcal{H} -matrices. *Computing*, 70:295–334, 2003.
- [28] L. Grasedyck and W. Hackbusch. A multigrid method to solve large scale Sylvester equations. *SIAM J. Mat. Anal.*, 29(3):870–894, 2007.
- [29] M. J. Grote and T. Huckle. Parallel preconditioning with sparse approximate inverses. *SIAM J. Sci. Comput.*, 18(3):838–853, 1997.

- [30] M. Güter and K.-O. Widman. The green function for uniformly elliptic equations. *Manuscripta Mathematica*, 37:303–342, 1982.
- [31] W. Hackbusch. *Multi-Grid Methods and Applications*. Springer-Verlag Berlin, 1985.
- [32] W. Hackbusch. *Elliptic Differential Equations. Theory and Numerical Treatment*. Springer-Verlag Berlin, 1992.
- [33] W. Hackbusch. *Iterative Solution of Large Sparse Systems*. Springer-Verlag New York, 1994.
- [34] W. Hackbusch. A sparse matrix arithmetic based on \mathcal{H} -matrices. Part I: Introduction to \mathcal{H} -matrices. *Computing*, 62:89–108, 1999.
- [35] W. Hackbusch. *Hierarchische Matrizen — Algorithmen und Analysis*. Springer, 2009.
- [36] W. Hackbusch. *Tensor Spaces and Numerical Tensor Calculus*. Springer-Verlag, Berlin, 2012.
- [37] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1991.
- [38] S. Lang. *Real and Functional Analysis*. Springer New York, 3rd edition, 1993.
- [39] A. Meister. *Numerik linearer Gleichungssysteme — Eine Einführung in moderne Verfahren*. Springer Spektrum, 5th edition, 2015.
- [40] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Society for Industrial Mathematics, 2nd edition, 2003.
- [41] Y. Saad. *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*, volume 66 of *Classics In Applied Mathematics*. SIAM Press, Philadelphia, PA, USA, second edition, 2011.
- [42] S. A. Sauter. Variable order panel clustering (extended version). Preprint 52/1999, Max-Planck-Institut für Mathematik, Leipzig, Germany, 1999.
- [43] S. A. Sauter. Variable order panel clustering. *Computing*, 64:223–261, 2000.
- [44] S. A. Sauter and C. Schwab. *Randelementmethoden*. Teubner, 2004.
- [45] C. Schwab. *p- and hp- Finite Element Methods: Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics*. Oxford Univ. Press, 1998.
- [46] C. Schwab and R. A. Todor. Sparse finite elements for elliptic problems with stochastic loading. *Num. Math.*, 95:707–734, 2003.
- [47] V. Simoncini. Computational methods for linear matrix equations. *in preparation for SIAM Review*, 1, 2013.

- [48] O. Steinbach. *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme*. Teubner, 2003.
- [49] G. W. Stewart. *Matrix Algorithms, Volume 1: Basic Decompositions*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.
- [50] J. Stoer. *Numerische Mathematik 1*. Springer, 9th edition edition, 2005.

Erklärung

Hiermit versichere ich,

(a) dass diese Abhandlung, abgesehen von der Beratung durch den Betreuer Prof. Dr. Steffen Börm, nach Inhalt und Form meine eigene Arbeit ist,

(b) außer dem Proceeding-Bericht [13] zu der Konferenz

84th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAMM), Novi Sad 2013

mit dem Titel

A Galerkin Approach for Solving Matrix Equations with Hierarchical Matrices

die Arbeit weder ganz noch zum Teil schon einer anderen Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen hat, veröffentlicht worden ist oder zur Veröffentlichung eingereicht wurde

(c) und dass die Arbeit unter Einhaltung der Regeln guter wissenschaftlicher Praxis der Deutschen Forschungsgemeinschaft entstanden ist.

Kiel, den 26. Mai 2015